

ORSAY
Série A. N°
N° d'ordre 3

509

Inscrit aux archives originales
du Centre de Documentation
C.N.R.S. sous le N°

403351

UNIVERSITE DE PARIS

Faculte des Sciences d'Orsay

THÈSE

Gabriel RUGET

A propos des

CYCLES ANALYTIQUES DE DIMENSION INFINIE

Soutenue le 9 Juin 1969 devant la Commission d'Examen

MM. H. CARTAN Président

**A. DOUADY }
P. SAMUEL } Examineurs**

UNIVERSITE DE PARIS

Faculte des Sciences d'Orsay

THÈSE

Gabriel RUGET

A propos des

CYCLES ANALYTIQUES DE DIMENSION INFINIE



Soutenue le 9 Juin 1969 devant la Commission d'Examen

MM. H. CARTAN Président

A. DOUADY }
P. SAMUEL } Examinateurs

UNIVERSITE DE PARIS

Faculté des Sciences d'Orsay

THÈSE

Présentée

à l'Université de Paris

pour l'obtention du D.E.S.



Constaté le 15 Juin 1957 devant la Commission d'Examen

M. H. CARTIER, Président

M. DUBOIS / M. BARRER / M. BARRER

TABLE DES MATIERES

<u>Chapitre I</u>	: La codimension topologique.
<u>Chapitre II</u>	: Multiplicités.
<u>Chapitre III</u>	: Un théorème d'image directe (cas analytique épidermique).
<u>Chapitre IIIbis</u>	: Un autre théorème d'image directe (cas où la source est de dimension finie).
<u>Chapitre IV</u>	: L'espace des opérateurs à indice.

Chaque chapitre comporte sa bibliographie. Les références telles que "Exposé x" se rapportent au Séminaire de Géométrie Analytique d'Orsay (1968-1969).

A propos des
CYCLES ANALYTIQUES DE DIMENSION INFINIE

INTRODUCTION

L'origine de ce travail est la question suivante, que nous avait suggérée l'étude des familles d'opérateurs elliptiques sur une variété compacte : depuis un beau théorème de Kuiper, on sait que l'ensemble Ω des opérateurs à indice d'un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, muni de la topologie de la norme, est un classifiant pour le groupe unitaire infini ; on connaît donc bien son anneau de cohomologie entière, mais peut-on donner une interprétation géométrique simple de chaque classe de cohomologie ? Il nous semblait que toute classe de degré $2n$ pourrait être "représentée" par un sous-ensemble analytique complexe de Ω , de codimension n . Il fallait d'abord expliquer ce qu'est la classe de cohomologie entière associée à un sous-ensemble analytique complexe d'une variété banachique. Les sous-ensembles que nous avons en vue étaient un peu spéciaux ("jolis"), mais, puisque J.P. Ramis avait étudié les sous-ensembles analytiques généraux de codimension finie, nous avons voulu écrire nos préliminaires dans le même cadre. Cela nous a conduit à introduire la notion de codimension topologique (chapitre I) qui, bien que très élémentaire, peut être utile dans d'autres occasions. Au chapitre II, nous définissons ce qu'est la classe associée à un sous-

ensemble analytique complexe (plus généralement à une "sous-variété entrouverte"), et nous disons un mot du cas réel : à un joli sous-ensemble analytique réel, on peut associer une classe modulo 2. Puis, revenant définitivement au cas complexe, nous envisageons, avec plus de détails que n'en exige notre problème initial, les intersections et images réciproques de sous-ensembles analytiques, définissant des multiplicités et étudiant leurs propriétés. On peut passer du chapitre II au chapitre IV, où nous résolvons le problème initial, explicitons toutes les classes de cohomologie entière de Ω , indiquons le comportement du cup-produit dans cette interprétation, signalons les classes de Chern et les composantes homogènes du caractère de Chern.

Mais l'étude, en général, des intersections et images réciproques d'ensemble analytiques nous avait fait regretter l'absence de théorème d'image directe (en dimension infinie), et nous avons suggéré à J.P. Ramis l'énoncé suivant :

"Soient V , W deux variétés analytiques banachiques, f une application analytique de V dans W , qui soit "épidermique" (i.e., en tout point de V , la dérivée de f est un opérateur à indice). Soit X un sous-ensemble analytique de V , localement définissable par un nombre fini d'équations, tel que la restriction de f à X soit propre. Alors, $f(X)$ est un sous-ensemble analytique de W , localement définissable par un nombre fini d'équations".

Nous avons démontré ce théorème en collaboration avec J.P. Ramis, utilisant la codimension topologique, mais, aussi, bien des résultats exposés dans le livre de ce dernier (chapitre III). Puis, nous avons défini la multiplicité d'image directe d'un sous-ensemble analytique, et démontré une formule "de projection", ce qui utilise les résultats du chapitre II.

Parallèlement, une autre question nous était naturellement apparue (de même que l'on peut étudier l'intersection de deux sous-ensembles analytiques d'une variété banachique, l'une de codimension finie, l'autre de dimension finie) : que peut-on dire de l'image directe par une application analytique propre d'un espace analytique de dimension finie dans une variété de dimension infinie ? Au chapitre IIIbis, nous démontrons essentiellement le théorème suivant :

"Soient V un espace analytique (complexe) de dimension (localement) finie (resp. une surface de Riemann), W une variété analytique hilbertienne (resp. banachique), f une application analytique propre de V dans W . Alors, $f(V)$ est un sous-ensemble analytique de W de dimension finie".

Les principaux résultats développés ici ont été résumés dans des Notes aux Comptes-rendus du 17 avril, 17 juin, 4 novembre et 23 décembre 1968. Le texte qui suit est une réunion de rédactions d'exposés faits en 1969 à la Faculté des Sciences d'Orsay. Je remercie Madame J. Maynard d'avoir, de mes manuscrits, fait d'aussi beaux stencils, et le Laboratoire de Mathématique de la Faculté des Sciences d'Orsay d'en avoir assuré le tirage.

C'est enfin avec le plus grand plaisir que je remercie Weishu Shih, avec qui j'ai travaillé en 1967 sur les familles d'opérateurs elliptiques, ce qui m'a initié à la recherche ; Jean-Pierre Ramis, avec qui j'ai eu la joie de vérifier l'efficacité du travail en équipe ; mon maître Henri Cartan, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail, m'a toujours prodigué les plus généreux encouragements et m'a fait l'honneur de patronner cette thèse ; enfin, mes premiers lecteurs, Pierre Lelong, Bernard Malgrange et Adrien Douady.

Exposé n° 12 : LA CODIMENSION TOPOLOGIQUE
(chapitre I)

Nous introduisons cette notion comme substitut de la notion de dimension pour l'étude de certains sous-ensembles fermés de variétés banachiques. Elle nous sera un ingrédient technique agréable dans les chapitres II et III.

Soit Δ_n l'ensemble des points de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont les coordonnées sont positives ou nulles, de somme 1 ; Δ_n est muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous appelons simplexe de dimension n d'un espace topologique E une application continue s de Δ_n dans E ; nous notons $|s|$ l'image d'une telle application, et ∂s (bord de s) la restriction de s au bord de Δ_n . Par "déformation d'une application continue f (d'un compact dans un espace topologique) en une autre g ", nous entendons une homotopie joignant f à g .

Définition 1 : Nous dirons qu'un fermé X d'un espace topologique E est de codimension topologique dans E au moins égale à n si, pour tout point x de X et tout voisinage de x dans E , il existe un sous-voisinage ouvert V de x possédant la propriété $C(n, X)$: tout simplexe de V de dimension strictement inférieure à n , dont le bord ne rencontre pas X , peut être déformé dans V , à bord fixe, en un simplexe de $V-X$.

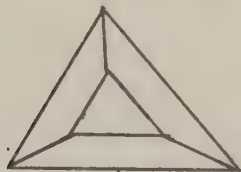
Ainsi, la notion de codimension est locale. Tout fermé est de codimension positive ou nulle ; dans un espace localement connexe par arcs, les fermés de codimension au moins égale à 1 sont les fermés sans point intérieur (penser par contre au cas de 0 dans le sous-espace de $\mathbb{R}$ formé par la suite $1/n$ et 0). On appellera codimension topologique de X ($\text{cotop } X$) le plus grand entier n tel que X soit de codimension au moins égale à n . Lorsqu'on se restreint à un ouvert de l'espace ambiant, la codimension de la trace de X ne peut qu'augmenter, ce qui permet de définir la codimension de X en un de ses points x ($\text{cotop}_x X$) comme la limite suivant le

filtre des voisinages V de x de la codimension de $X \cap V$ dans V . On remarquera que, si en un point x la codimension de X est finie, elle est nécessairement plus grande en tous les points voisins de x ; par contre, il peut y avoir dans tout voisinage d'un point de codimension infinie des points de codimension finie (dans [7], on en donne un exemple, où X est un sous-ensemble analytique d'un espace de Banach).

Proposition 1 : Si X est un fermé de codimension au moins égale à n d'un espace topologique E , étant donnés un simplexe s de dimension inférieure à n de E et une déformation h de ∂s telle que $h(1)$ ne rencontre pas X , il existe une déformation de s en un simplexe de $E-X$, prolongeant h .

Démonstration :

Choisissons un homéomorphisme "naturel" de Δ_n sur $\Delta_n \cup_{\partial \Delta_n} \partial \Delta_n \times \Delta_1$



(voir figure). Si on le compose avec l'application formée de la juxtaposition de s et h , on obtient ce que nous appellerons le simplexe " s couronné par h " et noterons s^h .

Il est clair que, pour résoudre notre problème, il nous suffit de savoir déformer s^h , à bord fixe, en un simplexe ne rencontrant pas X . Prenons un recouvrement $\mathcal{Q}$ de E par des ouverts possédant la propriété $C(n, X)$, et une subdivision barycentrique de Δ_n telle que tous les fragments de s^h soient petits d'ordre $\mathcal{Q}$. Pour construire une solution en grim pant sur le squelette de la subdivision, nous sommes ramenés au problème de départ, mais dans un ouvert possédant la propriété $C(n, X)$; on refait alors la même remarque qu'au début de cette démonstration.

On se convainc facilement qu'un ouvert V de E possède la propriété $C(n, X)$ si et seulement si l'application $\pi_0(V-X) \rightarrow \pi_0(V)$ est surjective et les ensembles $\pi_p(V, V-X)$ nuls pour p inférieur ou égal à $n-1$ (et pour tout point de base dans $V-X$). D'où le

Corollaire 2 : Sous les hypothèses de la proposition 1, l'inclusion de $E-X$ dans E induit (quel que soit le point de base) un isomorphisme des groupes d'homotopie de degrés inférieurs ou égaux à $n-2$.

En effet, la proposition 1 a montré que l'espace entier possède la propriété $C(n, X)$.

Remarque : Si X est de codimension infinie dans E , l'inclusion de $E-X$ dans E est ainsi une équivalence d'homotopie faible. Si de plus E est une variété banachique de classe C^0 , paracompacte (et donc métrisable [5] page 105), E et $E-X$ ont chacun le type d'homotopie de complexes simpliciaux ([5] page 134); d'après un théorème de J.H.C. Whitehead, ils ont alors le même type d'homotopie. Si E est une variété hilbertienne de classe C^∞ , les travaux de N. Kuiper, J. Eells, ... [4], démontrent alors l'équivalence différentiable de E et $E-X$.

Proposition 3 : Pour qu'un fermé X d'un espace localement contractile E soit de codimension topologique au moins égale à $n \geq 3$, il faut et il suffit que, quel que soit le (petit) ouvert contractile V de E , $V-X$ soit (non-vide), simplement connexe et que ses groupes réduits d'homologie entière soient nuls en degrés inférieurs ou égaux à $n-2$. Pour $n=1$, seule subsiste la condition de non-vacuité de $V-X$, c'est-à-dire de nullité de $H_0(V, V-X; \mathbb{Z})$; pour $n=2$, il faut rajouter la connexité de $V-X$, c'est-à-dire la nullité de $\tilde{H}_0(V-X)$.

C'est une conséquence directe du théorème de Hurewicz, lequel, superposé à la proposition 1, donne l'utile

Corollaire 4 : Si X est un fermé de codimension au moins égale à $n \geq 1$ d'un espace localement connexe par arcs E , les groupes $H_q(E, E-X; \mathbb{Z})$ et $H^q(E, E-X, \mathbb{Z})$ sont nuls pour $q < n-1$.

Si E est homotopiquement localement contractile, $H^q(E, E-X; \mathbb{Z})$ est isomorphe à $H_X^q(E; \mathbb{Z})$, cohomologie de E à support dans X avec coefficients dans le faisceau constant $\mathbb{Z}$. On peut alors démontrer le résultat global de nullité à partir du résultat local provenant de la définition de la codimension de X sans utiliser la proposition 1, à l'aide de la suite spectrale [2] qui lie $H_X^q(E; \mathbb{Z})$ aux $\underline{H}_X^q(E; \mathbb{Z})$ faisceautiques.

Proposition 5 : Soient X un fermé d'un espace topologique E ,

Y un sous-fermé de X . Alors, la codimension de Y est au moins égale à celle de X .

Démonstration :

Plaçons-nous une fois pour toutes dans un ouvert V de E , où la codimension de X soit n . Soit s un simplexe de V , de dimension inférieure à n , dont le bord ne rencontre pas Y , mais peut rencontrer X : ∂s étant une application d'un polyèdre de dimension $n-1$ dans $V-Y$, on peut, en grimpant sur le squelette de ce polyèdre et faisant usage de la proposition 1, déformer ∂s par une homotopie h ne rencontrant pas Y en une application ne rencontrant pas X . On déforme ensuite s^h , à bord fixe, en un simplexe t ne rencontrant pas X . Le simplexe t^{-h} est alors un déformé de s , à bord fixe, ne rencontrant pas Y .

Remarque : Il n'y a pas en général transitivité de la codimension : ainsi l'origine de $\mathbb{R}^3$ est de codimension 3 dans $\mathbb{R}^3$ et de codimension 1 dans le cône d'équation $x^2+y^2-z^2=0$, lequel est de codimension 1 dans $\mathbb{R}^3$. L'inégalité peut avoir lieu dans l'autre sens : l'origine de $\mathbb{R}$ est de codimension infinie dans la demi droite d'équation $x \geq 0$, et de codimension 1 dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, le bord de toute variété à bord, à coins, ... est de codimension infinie dans la variété.

Proposition 6 : Soit X un fermé d'un espace topologique E , admettant une filtration finie par des sous-fermés X_p tels que, pour tout p , X_p soit de codimension au moins égale à n dans $E-X_{p+1}$. Alors, X est de codimension dans E au moins égale à n . En particulier, toute réunion finie de fermés de codimension $\geq n$ est de codimension $\geq n$. Si la topologie de E peut localement être définie par une métrique complète, le même résultat vaut pour les réunions dénombrables (pourvu qu'elles soient fermées).

La proposition 1 rend les deux premiers résultats évidents. Le dernier énoncé généralise le théorème de Baire et se démontre de façon analogue : on évite de proche en proche tous les fermés de la suite, en prenant soin de déformer de moins en moins le simplexe, de façon à assurer la convergence du processus.

Lemme 7 : Soit U un ouvert d'un E.V.T.L.C. , X un fermé de U . Pour que la codimension de X soit au moins égale à n , il suffit que, pour toute boule B de U dessinée dans un sous-espace affine de dimension finie, on puisse trouver un sur-ensemble B' de B tel que $X \cap B'$ soit de codimension au moins égale à n dans B' (muni de la topologie induite).

Démonstration :

Soit V un ouvert convexe de U . Prenons un simplexe s de dimension $p < n$ de V , à bord dans $V - X$. A chaque subdivision barycentrique de Δ_p , on associe un simplexe s' linéaire par morceaux, qui est un déformé de s (par linéarité, V étant convexe). Si la subdivision est assez fine, $\partial s'$, pas plus que ∂s , ne rencontre le fermé X . Choisissons un B' associé à une boule B contenant s' , et déformons s' dans $B' \cap V$, à bord fixe, en un simplexe s'' ne rencontrant pas X . Alors, s peut être déformé, à bord fixe, en s'' couronné par l'homotopie faisant passer de $\partial s'$ à ∂s .

Nous retiendrons que, dans la situation du lemme 7 , il suffit pour que la conclusion soit valide que l'on sache déformer tout simplexe dont l'image est contenue dans une variété linéaire de dimension finie. Ce que nous allons appliquer à la démonstration de la

Proposition 8 : Tout fermé X localement compact d'un espace E dont la topologie est localement celle d'un E.V.T.L.C. de dimension infinie a une codimension dans E infinie.

Démonstration : Supposons que E soit un ouvert convexe d'un vectoriel F , et soit s un simplexe dont le bord ne rencontre pas X et dont l'image soit parallèle à un sous-vectoriel de dimension finie G . Appelons p la projection de F sur F/G . On peut supposer que $X \cap E$ est relativement compact dans F ; $p(X \cap E)$ est alors relativement compact dans F/G , et ne peut donc avoir de point intérieur. D'autre part, la compacité de ∂s entraîne l'existence d'un voisinage U de 0 dans F tel que les bords des simplexes translétés de s par un vecteur de U ne rencontrent pas X . Soit t un vecteur appartenant à U , mais pas à $p^{-1}(X \cap E)$. On peut déformer

s en le simplexe $s+t$ couronné par l'homotopie linéaire qui fait passer de $s+t$ à s .

Proposition 9 : Soit E_n une variété topologique séparée de dimension n . Les fermés de E_n de codimension 1 (resp. 2) sont ceux de dimension cohomologique (sur $\mathbb{Z}$) $n-1$ (resp. $n-2$). De façon générale, on a :

$$\text{cotop } X + \dim_{\mathbb{Z}} X \leq n.$$

Pour pouvoir affirmer l'égalité dans le cas où la dimension de X est inférieure à $n-2$, il faut connaître la "locale" simple connexité du complémentaire de X .

Démonstration : Montrons que $\text{cotop } X \geq p$ entraîne $\dim_{\mathbb{Z}} X \leq n-p$. L'espace X étant séparé et localement compact, il suffit ([1] page 76) de voir qu'il existe des voisinages V arbitrairement petits de points arbitraires de X tels que $H_c^q(V, \mathbb{Z})$ soit nul pour tout $q \geq n-p+1$. On peut supposer que V est un fermé de $\mathbb{R}^n$. La famille des compacts étant paracompactifiante dans V , $H_c^q(V, \mathbb{Z})$ coïncide avec la cohomologie d'Alexander à supports compacts $\bar{H}_c^q(V, \mathbb{Z})$ ([1] page 123). D'après un théorème de dualité ([9] page 342), ce dernier groupe est isomorphe à $H_{n-q}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - V; \mathbb{Z})$, lequel est nul pour $n-q \leq p-1$ d'après le corollaire 4. En changeant le sens du raisonnement et appliquant la proposition 3, on voit qu'un fermé de dimension $p \leq n-3$ de E_n est de codimension 2, ou bien $n-p'$.

Note : Il est raisonnable de penser que, si la dimension de X au sens des recouvrements est au plus égale à $n-3$, sa codimension dans E_n est au moins égale à 3.

Exemples : Soit X un fermé d'un espace topologique E , tel que E soit localement homéomorphe à $X \times \mathbb{R}^n$. Alors, d'après la proposition 3, X est de codimension n dans E . Cette remarque, le théorème de Łojasiewicz sur la triangulation des ensembles semi-analytiques, et la proposition 6 entraînent que tout sous-ensemble

semi-analytique fermé de dimension p d'une variété analytique réelle de dimension n est de codimension $n-p$ dans cette variété. Dans le cas particulier d'un sous-ensemble analytique complexe X d'une variété complexe, on utilise, au lieu du théorème de Łojasiewicz, la filtration de X donnée par ses ensembles singuliers SX , $S(SX)$, ...

Nous allons nous intéresser maintenant aux sous-ensembles analytiques des variétés de dimension infinie :

Définition 2 : Un sous-ensemble analytique X d'une variété analytique banachique V sera dit "joli" si, localement dans V , il existe des cartes où X s'exprime comme un produit $F \times Y$, où $F \oplus G$ est une décomposition de l'image de la carte ($\dim G < \infty$) et où Y est un sous-ensemble analytique de G .

On rencontrera dans le chapitre 4 de nombreux exemples de jolis sous-ensembles analytiques (réels ou complexes), mais il faut signaler que l'ensemble de ces sous-ensembles n'est pas lui-même très joli: il n'est pas stable par image inverse, ni intersection (dans $\ell^2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$, l'intersection des sous-variétés $y=0$ et $y=x^2$ est le cône $x^2 = 0$ de $\ell^2(\mathbb{C})$; ce cône, ayant pour seul point singulier l'origine, ne peut être joli).

On définit la codimension analytique d'un joli X comme le minimum de la codimension aux points réguliers. La codimension topologique de X est égale à cette codimension analytique (dans le cas réel) ou à son double (dans le cas complexe). L'ensemble singulier de X (noté SX) est par définition l'ensemble des points de X qui ne sont pas réguliers de codimension minimum. Dans le cas complexe, SX est un joli sous-ensemble analytique dont la codimension analytique excède d'au moins un celle de X . Dans le cas réel, SX n'est pas forcément analytique, mais c'est un fermé dont la codimension topologique est strictement supérieure à celle de X .

Envisageons maintenant le cas des sous-ensembles analytiques complexes quelconques d'une variété analytique banachique V . Rappelons quelques résultats [3] sur ces ensembles : leur codimension analytique en un point p peut être définie comme la limite inférieure des codimensions aux points réguliers voisins (ou $+\infty$), ou aussi bien comme la dimension maximum des plans (pour une quelconque

carte de V) passant par p et tels que p soit isolé dans l'intersection du plan et de l'ensemble. Les sous-ensembles irréductibles de codimension finie ont une codimension constante ; ils sont localement définissables par un nombre fini d'équations scalaires. Soit X un sous-ensemble analytique quelconque passant par un point p d'une variété V ; pour tout entier n , on peut trouver un voisinage U de p dans V et une décomposition de $X \cap U$

$$X \cap U = \bigcup X^i \cup Y ,$$

où les X^i sont irréductibles dans U , de codimension inférieure ou égale à n , et où Y est analytique de codimension strictement supérieure à n (et même enfermable dans une intersection complète de codimension $n+1$). Si X est définissable dans U par p équations scalaires, les X^i ou Y de codimension strictement plus grande que p sont automatiquement vides (ceci est facile, voir chapitre 2). On voit ainsi que les ensembles de codimension localement bornée sont exactement ceux qui sont localement définissables par un nombre fini d'équations (ensembles de définition finie). L'ensemble singulier d'un tel ensemble est analytique.

Nous voulons montrer qu'un ensemble analytique de codimension analytique (globale) n est de codimension topologique $2n$ dans la variété où il est dessiné. Mais nous aurons besoin au chapitre 3 d'un résultat plus fort, que nous énoncerons après avoir donné les définitions suivantes :

Définition 3 : Soit f une application analytique d'une variété analytique banachique V dans une autre W . Nous dirons que f est épidermique si, pour tout point x de V , sa dérivée $f'(x)$ est un opérateur à indice (i.e. dont le noyau et le conoyau - algébriques - sont de dimension finie). Nous dirons que f est i -dermique en x si l'indice $\text{ind } f'(x)$ - soit $\dim \text{Ker } f'(x) - \dim \text{Coker } f'(x)$ - vaut i .

Si f est épidermique, au voisinage de tout point x de V , la contre-image de $f(x)$ est enfermable dans une sous-variété de dimension finie de V (prendre la contre-image d'un "bout de plan" de dimension finie transverse en $f(x)$ à l'image de $f'(x)$). La

dimension analytique $\dim_x f^{-1}f(x)$ est donc bien définie, ainsi que celle de tout sous-ensemble analytique de $f^{-1}f(x)$.

Définition 4 : Soient f une application analytique épidermique de V dans W , et X un sous-ensemble analytique de V . A la restriction g de f à X , nous attacherons les entiers ≥ 0 suivants (profondeur, corang, codimension) au point x de X , ou globales :

$$\text{prof}_x g = \dim_x g^{-1}g(x)$$

$$\text{prof } g = \inf_{x \in X} \text{prof}_x g$$

$$\text{corg}_x g = \text{prof}_x g + \text{codim}_x X - \text{ind } f'(x)$$

$$\text{codim}_x g = \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in X}} \inf \text{corg}_y g$$

$$\text{codim } g = \inf_{x \in X} \text{corg}_x g$$

Lemme 10 : La fonction profondeur est semi-continue supérieurement. D'après l'appendice 1, on peut se ramener au cas $V = W \times \mathbb{C}^n$; f étant la projection parallèlement à $\mathbb{C}^n$. Si $g^{-1}g(x)$ est de dimension p en x , il existe un plan π contenu dans $\mathbb{C}^n$, de dimension $n-p$, tel que x soit point d'intersection isolé de π et X . La propriété résulte alors de ce que les plans parallèles à π et assez voisins ne rencontrent X que suivant un ensemble discret. On peut se ramener à ce même cas particulier pour démontrer la positivité de $\text{corg}_x g$: il suffit alors de voir que la codimension en x de $g^{-1}g(x)$ dans la fibre de f qui le contient est au plus égale à la codimension en x de X , ce qui est évident (voir chapitre 2). La fonction corang n'est pas en général semi-continue supérieurement (prendre $V = \mathbb{C}^3$, $W = \mathbb{C}^2$, f la projection parallèlement au troisième axe de coordonnées, X la réunion du plan $y+z=0$ et de la droite d'équations $x=0$, $y-z=0$).

Lemme 11 : Avec les notations de la définition 4, si de plus X est irréductible, la fonction corang est semi-continue supérieurement et atteint son minimum sur un ouvert dense de X .

La première assertion provient du lemme 10, du fait que la codimension de X est constante, et du fait que, X étant connexe,

l'indice de f aux divers points de X est le même. La fonction corang atteint donc son minimum sur un ouvert, qui rencontre nécessairement la variété RX des points réguliers de X . L'application f restreinte à RX est une application épidermique de RX dans W . L'ensemble E où le noyau de $(f/RX)'$ est de dimension minimum est donc (voir chapitre 4) le complémentaire d'un ensemble analytique, soit un ouvert dense de RX . Or, les traces dans E des fibres de g sont [6] des sous-variétés ayant toutes la même dimension, qui ne peut donc être que $\text{codim } g$.

Après ces remarques, démontrons le lemme technique important :

Lemme 12 : Les notations étant celles de la définition 4, supposons g propre⁽¹⁾. Pour tout point y de W , toute carte de W en y , et tout entier fini c au plus égal à $\inf_{x \in g^{-1}(y)} \text{codim}_x g$, il existe une sous-carte de W en y telle que tout sous-espace "affine" B de dimension finie de son domaine soit enfermé dans un sous-espace affine A de dimension finie tel que $A \cap g(X)$ soit analytique de codimension (analytique) au moins égale à c dans A .

Démonstration : On peut supposer que W est un ouvert d'un espace de Banach, y l'origine de cet espace, et la carte l'identité. On peut aussi supposer que B passe par l'origine (sinon, on remplace B par le cône sur B de sommet 0). Soit x un point de X : il existe une carte U de V en x telle que

$$X \cap U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X^\lambda \cup Y,$$

(les ensembles X^λ , en nombre fini, étant irréductibles, et Y étant contenu dans une intersection complète de codimension au moins égale à $c + \text{ind } f'(x)$) et telle que l'on puisse trouver des directions

(1) c'est-à-dire fermée, et telle que la contre-image de tout compact soit compacte. En fait, si V est paracompacte, donc métrisable, et si X est de définition finie, la deuxième hypothèse est inutile : cela tient à ce que l'application g ne peut être constante sur aucun ouvert de X (sur RX , elle est épidermique!).

1°) D^λ de dimension $\text{codim } X^\lambda$, telle que x soit isolé dans $(x+D^\lambda) \cap X^\lambda$,

2°) D' de dimension $c + \text{ind } f'(x)$, telle que x soit isolé dans $(x+D') \cap Y$,

3°) Δ , direction de W , de dimension finie, transverse aux images de tous les opérateurs $f'(t)$, pour t dans U .

Nous allons rapetisser la carte de façon à ce qu'elle ait de meilleures propriétés : soit d la dimension de la direction $f'(x) D' + \Delta$; cette direction étant transverse aux images des opérateurs $f'(t)$, la direction $D'(t) = f'(t)^{-1} (f'(x) D' + \Delta)$ est une fonction continue de t à valeurs dans la Grassmannienne des $(d + \text{ind } f'(x))$ -directions de U . Pour $t=x$, on obtient une direction contenant D' ; donc, si t reste assez voisin de x , $D'(t)$ contiendra une direction de même dimension que D' , voisine de D' , et dont le représentant passant par t ne rencontrera Y que suivant un ensemble discret (nous passons en fait ici sous silence deux lemmes faciles). En reprenant pour les D^λ (en nombre fini) les considérations faites sur D' , nous voyons que nous pouvons choisir U assez petit pour que

1°) $f'(t)^{-1} (f'(x) D' + \Delta)$ contienne une direction $D^\lambda(t)$ de dimension $\text{codim } X^\lambda$ telle que t soit isolé dans $(t+D^\lambda(t)) \cap X^\lambda$

2°) la même assertion, relative à D' et Y .

La contre-image $g^{-1}(0)$ étant compacte, elle possède un recouvrement fini par des domaines U_i de cartes de V en x_i ayant toutes les propriétés ci-dessus énumérées (nous nous donnons, en même temps que les cartes, l'assortiment de directions $D_i^\lambda, D_i', \Delta_i$). Soit Ω le voisinage de $g^{-1}(0)$ réunion des U_i . L'application g étant propre, on démontre facilement qu'il existe un voisinage w de 0 dans W tel que $g^{-1}(w)$ soit contenu dans Ω . Ce w est une solution de notre problème. Soit en effet B un sous-espace de dimension finie de w , et A la somme $B + f'(x_i) D_i^\lambda + f'(x_i) D_i' + \Delta_i$. Grâce aux précautions de transversalité, $f^{-1}(A)$ est une sous-variété fermée $\mathcal{A}$ de $f^{-1}(w) \cap \Omega$, de dimension $k+i$, si k est la dimension de A , et i l'indice de f , que nous pouvons supposer constant

si nous traitons séparément les composantes connexes (en nombre fini) de $g^{-1}(0)$. Le sous-ensemble $X \cap \mathcal{A}$ est analytique dans $\mathcal{A}$, et l'on a, en tout point x de $\mathcal{A}$

$$\text{codim}_{x, \mathcal{A}} X \cap \mathcal{A} \geq \inf(c+i, \text{codim}_x X) .$$

En effet, si x appartient à un Y_i , mais à aucun X_i^λ , comme l'espace tangent en x à $\mathcal{A}$ contient une direction voisine de D_i' , $X \cap \mathcal{A}$ est en x de codimension au moins $c+i$. Pour la même raison, si x appartient à X_i^λ , on a $\text{codim}_{x, \mathcal{A}}(X_i^\lambda \cap \mathcal{A}) = \text{codim}_x X_i^\lambda$.

Si nous appelons $\alpha(x)$ le nombre $\dim_x X \cap \mathcal{A} - \dim_x g^{-1}g(x)$, nous avons $\alpha(x) \leq k+i - \inf(c+i, \text{codim}_x X) - \text{prof}_x g \leq k - \inf(c, \text{corg}_x g)$. Or, c est inférieur ou égal à $\inf_{x \in g^{-1}(0)} \text{codim}_x g$, donc, d'après la compacité de $g^{-1}(0)$, à $\inf_{x \in \theta} \text{corg}_x g$, θ étant un certain voisinage de $g^{-1}(0)$. Ainsi, $\sup_{x \in \theta} \alpha(x) \leq k-c$, et le théorème de Remmert classique appliqué à la fonction g restreinte à $X \cap \mathcal{A}$ nous dit que $g(X \cap \mathcal{A})$ est un ensemble analytique de dimension en 0 inférieure ou égale à $k-c$; la dimension de $g(X \cap \mathcal{A})$ est en tout point inférieure ou égale à $k-c$ si nous avons pris soin de choisir les U_i inclus dans θ ; alors, $\text{codim}_w g(X) \cap w \geq k - (k-c) = c$.

Le lemme 7 nous donne alors immédiatement la moitié de la

Proposition 13 : Soit f une application analytique épidermique d'une variété analytique banachique V dans une autre W . Soit X un sous-ensemble analytique de V , tel que la restriction g de f à X soit propre. Alors, $g(X)$ est un fermé de W de codimension topologique en y égale à $2 \inf_{x \in g^{-1}(y)} \text{codim}_x g = 2\gamma(y)$.

Pour montrer l'égalité, choisissons un point a de $g^{-1}(y)$ tel que $\text{codim}_a g = \gamma(y)$ supposé fini. Il existe une suite a_j convergeant vers a telle que $\text{corg}_{a_j} g = \gamma(y)$. Soit v_j un germe irréductible de la décomposition de X en a_j de la plus petite codimension possible (nécessairement finie). La semi-continuité de la profondeur entraîne que le corang de g reste égal à $\gamma(y)$ sur

un voisinage de a_j dans v_j . Nous pouvons alors trouver (cf. Lemme 11), aussi près que nous voulons de a_j , un ouvert régulier de X sur lequel l'application g est de "rang" constant, et qui a donc pour image une sous-variété de W de codimension $\gamma(y)$. Lorsque j tend vers $+\infty$, les bouts de sous-variétés ainsi obtenus "tendent" vers y , ce qui, grâce à la proposition 5, entraîne $\text{cotop}_y g(X) \leq 2\gamma(y)$.

Corollaire 14 : Soit X un sous-ensemble analytique, de codimension analytique n , d'une variété analytique banachique V . Alors, X est de codimension topologique $2n$ dans V , et l'ensemble singulier SX de X est un fermé (non nécessairement analytique) de codimension topologique $2n+2$ dans V .

Ceci est bien sûr beaucoup plus facile à démontrer directement que la proposition 13. Pour la seconde assertion, soit x un point singulier de X et

$$X = \bigcup X^\lambda \cup Y$$

une décomposition de X (dans les germes en x), où les X^λ , en nombre fini, sont irréductibles de codimension analytique n , et où Y est analytique de codimension au moins égale à $n+1$. L'ensemble singulier SX est contenu dans $S(\bigcup X^\lambda) \cup Y$, ce qui permet de conclure puisque $\bigcup X^\lambda$ est de définition finie.

Remarque : Il ne faudrait pas croire que l'image par une application différentiable propre d'indice i d'un fermé de codimension topologique n dans la variété source est de codimension, au plus égale à $n-i$ dans la variété but (comme cela a lieu dans le cas analytique, d'après ce qui précède). Soit en effet I un intervalle de $\mathbb{R}$, J un carré de $\mathbb{R}^2$, Γ le graphe de la courbe de Peano appliquant continûment I sur J . On peut voir que Γ est un fermé de codimension 2 de $I \times J$ (il est sans point intérieur, et, localement dans $I \times J$, son complémentaire est connexe). Or, la projection de $I \times J$ sur le second facteur, qui a pour indice 1 et qui est propre sur Γ , transforme Γ en J tout entier.

Remarque : Si f est une application continue de E sur F

(espaces topologiques), on doit trouver des relations entre la dimension de F et la codimension dans E des fibres de f . Un résultat trivial dans ce sens est le suivant : si f est une fibration de E sur une variété topologique de dimension n , ses fibres sont de codimension au plus n .

Appendice 1 : Réalisation locale d'une application épidermique comme une projection (nous traiterons le cas analytique complexe).

La question étant locale, les variétés source et but V et W seront assimilées à des voisinages de l'origine de leurs espaces tangents, en a et $f(a)$ respectivement. On peut identifier V à la sous-variété de $V \times W$ d'équation $y - f(x) = 0$, l'application f devenant la projection sur le second facteur. Soit q la codimension de l'image de $f'(0)$, et S un q -plan de W supplémentaire de cette image. L'équation $y - f(x) \in S$ définit une sous-variété $\tilde{V}$ de $V \times W$, telle que la projection de $\tilde{V}$ sur W soit une submersion, à fibres de dimension $i + q$ (i est l'indice de f). Ainsi, $\tilde{V}$ s'écrit localement $\mathbb{C}^{i+q} \times W$, V est une sous-variété de $\tilde{V}$, et f est induite par la projection sur le second facteur de $\mathbb{C}^{i+q} \times W$.

Appendice 2 : Opérateurs à indice réels coorientés.

Soient E, F deux espaces de Banach réels. Un opérateur à indice coorienté de E dans F sera la donnée d'un opérateur à indice de E dans F et d'un couple d'orientations sur le noyau et le conoyau de cet opérateur (si on change simultanément les deux orientations, on déclare qu'on a le même opérateur coorienté ; si l'opérateur est inversible, le coorienter, c'est l'affecter d'un signe $\pm$). Nous noterons $\tilde{\Omega}(E, F)$ l'ensemble ainsi obtenu. Si $u \in \Omega(E, F)$ et si V est un sous-espace de F , de dimension finie transverse à l'image de u , muni d'une orientation, on peut choisir canoniquement une orientation sur $u^{-1}(V)$: en effet, V et $\text{coker } u$ étant orientés, l'isomorphisme canonique $V/u(u^{-1}(V)) \xrightarrow{\cong} \text{coker } u$ nous permet d'orienter $u(u^{-1}(V))$ de façon à avoir :

$$V = u(u^{-1}(V)) + \text{coker } u.$$

Utilisant ensuite l'isomorphisme canonique $u^{-1}(V)/\ker u \xrightarrow{\cong} u(u^{-1}(V))$,

nous orientons $u^{-1}(V)$ de façon à ce que

$$u^{-1}(V) = u(u^{-1}(V)) + \ker u .$$

Si W est un sur-espace de V , u induit un isomorphisme de $u^{-1}(W)/u^{-1}(V)$ sur W/V . Appelons Q cet espace. Les orientations de V , W , $u^{-1}(W)$ sont liées par les relations :

$$W = Q + V \quad \text{et} \quad u^{-1}(W) = Q + u^{-1}(V)$$

Cette remarque montre que la définition suivante d'une topologie sur $\tilde{\Omega}$ d'espace étalé sur Ω est consistante : soit V un espace transverse à l'image d'un opérateur coorienté u ; il reste transverse aux images des opérateurs v de Ω voisins de " u ", et les contre-images $v^{-1}(V)$ restent voisines de $u^{-1}(V)$ - en particulier, on peut transporter sans ambiguïté une orientation de $u^{-1}(V)$ à $v^{-1}(V)$. Nous déclarerons alors que " v " est voisin de u dans $\tilde{\Omega}$ s'il est muni de la coorientation qui transforme une orientation de V de la même façon que la coorientation de u .

Remarquons que nous aurions pu changer de conventions, et écrire simultanément $V = \operatorname{coker} u + u(u^{-1}(V))$, $u^{-1}(V) = \ker u + u(u^{-1}(V))$, $W = V + Q$, $u^{-1}(W) = u^{-1}(V) + Q$. Cela n'aurait rien changé au résultat si l'indice de u est pair ; et cela aurait défini une autre topologie tout aussi consistante sur les composantes de $\tilde{\Omega}$ d'indice impair.

Remarquons que les opérateurs à indice coorientés permettent aussi de transporter par image directe les coorientations des espaces de codimension finie sur lesquels ils sont injectifs (un opérateur à indice sans coorientation transporte par image réciproque les coorientations des espaces transverses à son image, et par image directe les orientations des espaces de dimension finie sur lesquels il est injectif). Il semble qu'un bon cadre pour des problèmes d'image directe (à coefficients entiers, et non modulo 2) en dimension infinie soit le suivant : variétés différentiables banachiques pour objet,

applications propres différentiables dont la différentielle en tout point soit un opérateur à indice muni d'une coorientation (variant continûment avec le point) pour morphismes. Un cas particulier, que nous utiliserons au chapitre 2, est celui du plongement d'une sous-variété de codimension finie coorientée dans une variété. Remarquons enfin que si E, F sont des espaces complexes, et E', F' les espaces réels sous-jacents, il y a un plongement naturel de $\Omega(E, F)$ dans $\tilde{\Omega}(E', F')$.

Limitons-nous, pour une dernière indication, au cas $E = F = \ell^2(\mathbb{R})$. L'espace $\tilde{\Omega}$ est alors connexe : il suffit de savoir déformer un opérateur coorienté non inversible en le même opérateur muni de l'autre coorientation ; prenons par exemple un opérateur u dont le noyau n'est pas nul. Transformons le à image fixe, en faisant tourner son noyau dans une Grassmannienne de E , en un opérateur v de même image coorientée que u , et de même noyau (avec l'autre orientation) que u . Il ne reste plus pour terminer qu'à utiliser la connexité du groupe linéaire de ℓ^2 . Ainsi, $\tilde{\Omega}$ est un revêtement connexe d'ordre 2 de Ω . Mais le groupe de Poincaré de Ω est $\mathbb{Z}_2$ (cf. [3] : $[S', \Omega] \approx Kc(S') \approx \mathbb{Z}_p$). Donc, $\tilde{\Omega}$ est le revêtement simplement connexe de Ω .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREDON : Sheaf Theory ; Mc Graw-Hill.
- [2] GROTHENDIECK : Local Cohomology, notes by Hartshorne ; Harvard University, 1961, on Springer-Verlag.
- [3] MAZET-RAMIS : Exposés 10, 11.
- [4] MOULIS : Exposé 8.
- [5] PALAIS : Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds, Brandeis University, 1964-65.

- [6] PENOT : La notion d'application analytique, Séminaire Choquet, 1966-67, n°3, page 36.
- [7] RAMIS : Exposé 1.
- [8] RUGET : Exposé 2.
- [9] SPANIER : Algebraic Topology ; Mc Graw-Hill.

Exposé n° 16 bis : INTERSECTIONS
(chapitre II)

I - Coorientations :

Soit E un espace topologique métrisable, et Λ l'anneau $\mathbb{Z}$ ou l'anneau $\mathbb{Z}_2$ (pour ne pas nous placer dans des hypothèses d'une généralité ici illusoire). Si X est un fermé de E , le faisceau de cohomologie locale à support dans X , noté $\underline{H}_X^p(\Lambda)$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \longmapsto H_{X \cap U}^p(U; \Lambda) .$$

Ces faisceaux sont liés aux groupes de cohomologie de E à support dans X par la suite spectrale ([2] page 5 : c'est la suite spectrale relative aux foncteurs dérivés d'un composé de deux foncteurs)

$$H^p(E; \underline{H}_X^q(\Lambda)) = E_2^{pq} \implies H_X^n(E; \Lambda)$$

Supposons qu'il existe un entier n tel que, pour tout point x de X , il existe un voisinage U de x dans E tel que la paire $(U, U \cap X)$ soit homéomorphe à la paire $((U \cap X) \times \mathbb{R}^n, (U \cap X) \times \{0\})$. Alors, le faisceau $\underline{H}_X^n(\Lambda)$, qui a pour support X , est localement isomorphe au faisceau constant Λ le long de X ; les autres faisceaux $\underline{H}_X^p(\Lambda)$ sont nuls. Nous dirons que X est coorientable dans E si $\underline{H}_X^n(\Lambda)|_X$ est globalement isomorphe au faisceau constant Λ ; choisir une coorientation sera alors choisir un tel isomorphisme (c'est toujours possible, et de façon unique, si $\Lambda = \mathbb{Z}_2$). Si X est un fermé coorienté de E , de "codimension" n , la suite spectrale ci-dessus dégénère en un isomorphisme de $H^{i-n}(X; \Lambda)$ sur $H_X^i(E; \Lambda)$, pour tout entier i . Supposons désormais E homotopiquement localement contractile,

pour que $H_X^i(E; \Lambda)$ soit (canoniquement) isomorphe à $H^i(E, E-X; \Lambda)$, et, notant α l'injection coorientée de X dans E , désignons par $\alpha_!$ l'isomorphisme

$$\alpha_! : H^{i-n}(X; \Lambda) \xrightarrow{\approx} H^i(E, E-X; \Lambda)$$

Définition : Nous appellerons classe fondamentale de X dans E et nous noterons $[X]_E$ l'élément $\alpha_! 1$ de $H^n(E, E-X; \Lambda)$.

En fait, dès que nous connaissons $[X]_E$, c'est-à-dire dès que nous avons choisi une coorientation de X dans E , nous pouvons donner une autre construction du morphisme $\alpha_!$, et même le préciser : étant donné un fermé quelconque Y de X , nous allons construire un morphisme

$$\alpha_! : H^{i-n}(X, X-Y; \Lambda) \longrightarrow H^i(E, E-Y; \Lambda)$$

qui, au signe près peut être ([1] page 150), commutera avec les restrictions et le morphisme $\alpha_!$ précédent. C'est ce nouvel $\alpha_!$ que nous utiliserons exclusivement. Soit v la famille, ordonnée par l'inclusion, des paires d'ouverts (U, V) de E , où U est un voisinage de X et V est un voisinage de $X-Y$. Nous prétendons que le morphisme naturel α^* de $\lim_{\leftarrow} \text{ind. } H^i(U, V; \Lambda)$ dans $H^i(X, X-Y; \Lambda)$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que la paire $(X, X-Y)$ est terne dans E ("tout" [9] page). En effet, X est terne dans E (pour la cohomologie d'Alexander, ou aussi bien singulière, avec nos hypothèses) comme fermé d'un paracompact, et $X-Y$ est terne dans $E-Y$ (donc dans E) pour la même raison. Prenons donc une classe $b \in H^{i-n}(U, V)$ telle que $\alpha^* b' = b$. La définition

$$\alpha_! b = [X]_U \cup b'$$

(où $[X]_U$ est aussi bien défini que $[X]_E$) est consistante, car deux classes b' et b'' représentant b coïncident nécessairement dans un voisinage de la paire $(X, X-Y)$.

Etant donnés un fermé Y de X , une classe $a \in H^*(X, X-Y)$, un fermé Z de E , une classe $b \in H^*(E, E-Z)$, nous avons

$$(1) \quad \alpha_! (a \cup \alpha^* b) = \alpha_! a \cup b \in H^*(E, E-Y \cap Z) .$$

En effet, si a' est un prolongement de a à un voisinage $(U, U-Y')$ de $(X, X-Y)$, les deux membres, considérés comme éléments de $H^*(U, U-Y \cap Z)$ sont égaux à $[X]_U \cup a' \cup \text{restric.} b$. On a aussi, si Y et Z sont deux fermés de X et a et b des classes de $H^*(X, X-Y)$ et $H^*(X, X-Z)$ respectivement,

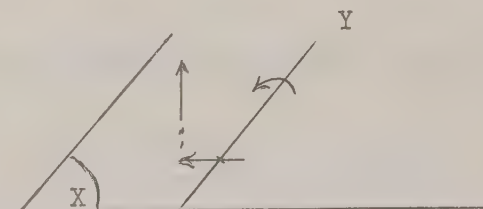
$$(2) \quad \alpha_! (a \cup b) \cup [X]_E = (-1)^n \text{degré } b \quad \alpha_! a \cup \alpha_! b \in H^*(E, E-Y \cap Z)$$

Remarque : Si X est un rétracte de voisinage dans E (ce qui est par exemple vrai si X est une sous-variété fermée d'une quelconque variété banachique paracompacte, car X est alors un A.N.R. [5] page 105), on peut étendre les classes de $H^*(X, X-Y)$ à un voisinage fixe de $(X, X-Y)$.

Si Y est un fermé de X tel que X ressemble localement à $Y \times \mathbb{R}^p$, et si β désigne l'injection de Y dans X , la coorientabilité simultanée de α et β entraîne celle de $\alpha\beta$. La coorientation de $\alpha\beta$ que nous associerons à des coorientations de α et β sera celle qui assure l'égalité

$$(\alpha\beta)_! = \alpha_! \beta_! : H^*(Y) \longrightarrow H^*(E, E-Y) .$$

Le dessin ci-contre, où E est l'espace à 3 dimensions, et où les coorientations sont indiquées par des flèches, visualise cette convention.



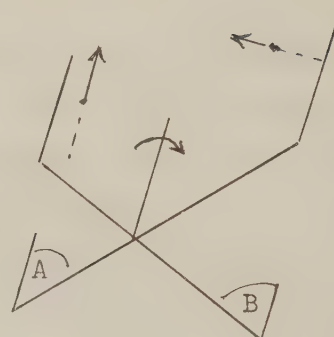
Supposons maintenant que E soit une variété banachique réelle de classe C^1 , paracompacte. Si A et B sont deux sous-variétés A -coorientées de classe C^1 , transverses dans E ,

on sait que l'on a :

$$[A]_E \cup [B]_E = [A \cap B]_E \in H^*(E, E - A \cap B; \Lambda) ,$$

pour la coorientation de $A \cap B$ indiquée sur le dessin ci-contre.

Si maintenant X est une sous-variété coorientée de E , et A, B deux sous-variétés coorientées de X , transverses dans X , si nous coorientons A et B dans E , $A \cap B$ dans X et dans E conformément aux conventions indiquées plus haut, la formule (2) nous donne



$$(3) [A \cap B]_E \cup [X]_E = (-1)^{\text{codim}_E X \text{ codim}_X B} [A]_E \cup [B]_E \in H^*(E, E - A \cap B) .$$

Dans le cas où X admet un voisinage tubulaire dans E , (par exemple si X est une sous-variété d'une variété de classe C^3 admettant des partitions de l'unité [11]), on peut démontrer cette formule en laissant A fixe dans X et en poussant B génériquement normalement à X , i.e. en rajoutant à la figure l'image B' d'une section différentiable générique du fibré normal à X dans E ; les deux membres de la formule sont alors représentées par l'intersection de A et de B' , qui sont transverses dans E .

II - Sous-variétés entrouvertes. Jolis sous-ensembles analytiques

Définition 1 : Soit E une variété banachique réelle de classe C^1 . Nous dirons qu'un fermé X de E en est une sous-variété entrouverte Λ -coorientée de codimension n s'il existe un sous-fermé A de X de codimension topologique dans E au moins égale à $n+2$ tel que $X-A$ soit une sous-variété Λ -coorientée de codimension n de $E-A$.

L'exemple que nous utiliserons le plus souvent d'une telle situation est celui où X est un sous-ensemble analytique complexe de codimension finie d'une variété analytique complexe E (on peut alors prendre $\Lambda = \mathbb{Z}$).

Dans le cas général, le corollaire I.4, joint à la suite exacte de cohomologie du triple $(E, E-A, E-X)$ nous enseigne que l'application naturelle de $H^q(E, E-X; \mathbb{Z})$ dans $H^q(E-A, E-X; \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $q < n$, ainsi d'ailleurs, d'après la formule des coefficients universels, que si on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}_2$. D'après le paragraphe 1, ces groupes sont nuls pour $q < n$, et $H^n(E, E-X; \Lambda)$ est muni d'un isomorphisme canonique sur $H^0(X-A; \Lambda)$, lequel n'est pas forcément égal à $H^0(X; \Lambda)$ (penser à un cône dans $\mathbb{R}^3$). Nous noterons $[X]_E$ et nous appellerons classe fondamentale de X dans E l'image de $1 \in H^0(X-A; \Lambda)$ par cet isomorphisme. Cette classe ne dépend pas du fermé A susceptible d'entrer au côté de X dans la définition 1, comme on le voit en écrivant un diagramme et en utilisant le fait que, si A et A' sont de codimension au moins égale à $n+2$ dans E , il en va de même pour $A \cup A'$. Il arrivera que nous considérerons la classe $[X]_E$ comme un élément de $H^n(E; \Lambda)$.

Proposition 1 : Soit X une sous-variété entrouverte Λ -coorientée de codimension n de la variété E ; Soient F une autre variété et f une application de classe C^1 de F dans E . Supposons que l'on puisse choisir A (celui de la définition 1) tel que $\text{cotop}_F f^{-1}(A) \gg n+2$ et tel que la restriction de f au complémentaire de $f^{-1}(A)$ soit transverse à $X-A$. Alors, $f^{-1}(X)$ est une sous-variété entrouverte de F de codimension n munie d'une Λ -coorientation canonique et f^* transforme $[X]_E \in H^n(E, E-X)$ en $[f^{-1}(X)]_F \in H^n(F, F-f^{-1}(X))$.

C'est une conséquence immédiate des définitions qui précèdent.

Un joli sous-ensemble analytique réel Y de codimension n d'une variété analytique banachique réelle V n'est pas en général une sous-variété entrouverte de cette variété. Nous allons

montrer qu'on peut toutefois lui attacher de façon naturelle une classe fondamentale $[Y]_V \in H^n(V, V-Y; \mathbb{Z}_2)$. Si Y est un espace analytique réel de dimension finie, cela nous permettra de retrouver la classe fondamentale d'homologie de Y introduite par Borel-Haefliger [10] : il suffit en effet de construire cette classe localement, auquel cas on réalise Y comme sous-ensemble analytique d'un $\mathbb{R}^n$, et on prend l'image de $[Y]_{\mathbb{R}^n}$ par la dualité de Poincaré (on obtient bien sûr une classe d'homologie à support non nécessairement compact).

Si nous appelons SY l'ensemble singulier de Y , qui est de codimension topologique au moins égale à $n+1$, la suite ci-dessous est exacte

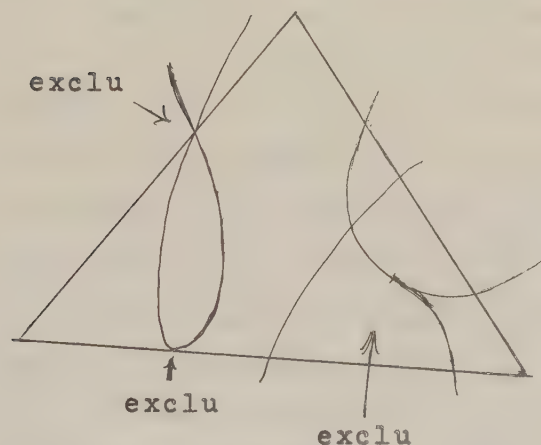
$$0 \rightarrow H^n(V, V-Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\rho} H^n(V-SY, V-Y; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(V, V-SY; \mathbb{Z}_2)$$

Nous allons montrer que $\partial[Y-SY]_{V-SY}$ est nul. Nous définirons alors $[Y]_V$ comme étant l'unique contre-image par ρ de $[Y-SY]$. Remarquons que les groupes $H_{n-1}(V, V-Y; \mathbb{Z})$, $H_{n-1}(V-SY, V-Y; \mathbb{Z})$ et $H_n(V, V-SY; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ sont tous nuls. D'après la formule des coefficients universels, la suite ci-dessous est isomorphe à la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(H_n(V, V-Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\rho} \text{Hom}(H_n(V-SY, V-Y; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial} \text{Hom}(H_{n+1}(V, V-SY; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) .$$

Choisissons un point de base à l'extérieur de Y , et rappelons-nous que $H_{n+1}(V, V-SY; \mathbb{Z})$ est un quotient de $\pi_{n+1}(V, V-SY)$. Prenons donc une boule B de dimension $n+1$ de V , à bord dans $V-SY$, et montrons que l'entier modulo 2 que lui associe l'homomorphisme $\partial[Y-SY]$ est nécessairement nul : pour calculer cet entier, nous considérons le bord D de B comme une boule de dimension n de $V-SY$, à bord dans le point de base, donc dans $V-Y$, et nous appliquons à D l'homomorphisme $[Y-SY]_{V-SY}$, dont il nous faut maintenant donner une interprétation géométrique :

si D est approchée, de façon quelconque, par une boule $\tilde{D}$ différentiable par morceaux, telle que $\tilde{D}$ ne rencontre la variété $Y-SY$ qu'à l'intérieur des morceaux, et ceci transversalement, $\langle [Y-SY], D \rangle$ est le nombre modulo 2 de ces intersections. Sachant que $\tilde{D}$ est, dans V , le bord d'une boule $\tilde{B}$, nous devons donc montrer, utilisant l'hypothèse d'analyticité de Y , que les intersections de $\tilde{D}$ et Y sont en nombre pair. Par fragmentation, et en nous plaçant localement dans des cartes de V , nous pouvons nous ramener au cas où $\tilde{B}$ est dessinée dans un espace affine de dimension $n+1$, et rencontre Y , suivant un ensemble analytique réel A de dimension 1. D'après l'hypothèse de transversalité sur $Y \cap \tilde{D}$, les branches de A coupent simplement $\tilde{D}$. Il nous



suffit de montrer que le nombre de branches issues d'un point de A est pair. Or, ceci résulte de la description locale de A comme revêtement ramifié [12] au-dessus de $\mathbb{R}$ pointé par l'origine (au-dessus de 0, il y a un seul point de A ; au-dessus de $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, des branches dont le nombre est celui des racines, toutes simples, d'un polynôme de même degré).

III - Sous-ensembles analytiques complexes. Multiplicités.

Nous allons désormais limiter notre étude aux variétés analytiques banachiques complexes, morphismes analytiques et sous-ensembles analytiques, ce qui nous permettra d'aller un peu au-delà des situations de transversalité, et de définir des multiplicités. Faisons d'abord deux remarques :

1° Soient X et Y deux sous-ensembles analytiques ^{pure}, de codimensions n et p respectivement d'une variété V ; alors, toutes les composantes irréductibles de $X \cap Y$ (qui sont ^{localement} nombre fini) ont une codimension au plus égale à $n+p$.

2° Soit f un morphisme d'une autre variété W dans V ; alors, toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(X)$ (qui sont localement en nombre fini), ont une codimension au plus égale à n dans W . Pour la seconde assertion, la considération du graphe de f permet de se ramener au cas où W est une sous-variété de V , auquel cas on utilise la caractérisation de la codimension d'un sous-ensemble analytique comme borne supérieure des dimensions des plans complexes ne rencontrant l'ensemble qu'en un point isolé (on se place en un point de la composante étudiée de $W \cap X$ qui n'appartienne qu'à cette composante). Pour la première assertion, on procède par l'absurde, prenant la trace de la situation sur un plan de dimension plus grande que $n+p$ qui ne rencontrerait $X \cap Y$ qu'en un point isolé, alors que les codimensions des traces de X et Y sont inférieures ou égales à n et p respectivement, d'après ce qui précède. On est alors ramené au même problème en dimension finie, auquel cas on utilise l'astuce habituelle : on considère l'intersection de $X \times Y$ avec la diagonale du carré cartésien de l'espace ambiant.

Nous remarquons avec regret que, si V est de dimension infinie, la diagonale de $V \times V$ n'est pas de codimension finie dans $V \times V$, non plus que le graphe de f dans $W \times V$. Ceci empêche de considérer, comme à l'habitude, l'étude des images réciproques comme un sous-produit de l'étude des intersections. Nous allons donc renverser cet ordre.

Le sous-ensemble X étant toujours de codimension pure n dans V , soit P une composante irréductible de $f^{-1}(X)$ de codimension égale à n (il se peut qu'il n'y en ait pas ; nous n'avons alors rien à raconter). Soit Q la réunion des autres composantes de $f^{-1}(X)$. L'intersection de P et Q est de codimension complexe au moins égale à $n+1$, donc de codimension topologique au moins égale à $2n+2$. La suite exacte de Mayer-Vietoris, jointe à I.4, nous dit alors que le morphisme naturel

$$\theta : H^{2n}(W, W-P) \oplus H^{2n}(W, W-Q) \longrightarrow H^{2n}(W, W-f^{-1}(X))$$

est un isomorphisme (le groupe de coefficients, tout au long de ce paragraphe, est $\mathbb{Z}$). Or, nous savons que $H^{2n}(W, W-P)$ est canoniquement isomorphe à $H^{2n}(W-SP, W-P)$, donc à $\mathbb{Z}$, puisque $P-SP$ est connexe (irréductibilité de P) et canoniquement $\mathbb{Z}$ -coorienté (grâce à la structure complexe) : $H^{2n}(W, W-P)$ est engendré par $[P]_W$.

Définition 2 : Nous appellerons multiplicité le long de P de la contre-image de X par f , et nous noterons $\mu(X, f; P)$, la coordonnée suivant $[P]_W$ de $\theta^{-1} f^*[X]_V$.

Propriété 0 : La notion de multiplicité d'une contre-image le long d'une composante irréductible propre est une notion locale :

Si nous nous restreignons à un ouvert U de W , la composante propre M de $f^{-1}(X)$ peut se fragmenter en plusieurs (ou aucune) composantes irréductibles propres $M_j^!$ ($j \in J$) de $f|_U^{-1}(X)$. Nous affirmons que, pour tout j ,

$$\mu(X, f|_U; M_j^!) = \mu(X, f; M) .$$

Soit N la réunion des composantes de $f^{-1}(X)$ autres que M , et $N_j^!$ la réunion des composantes de $f^{-1}(X) \cap U$ autres que $M_j^!$. Ecrivons le diagramme ci-dessous, que les flèches verticales de gauche rendent commutatif par hypothèse

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(W, W-M) \oplus H^{2n}(W, W-N) & \xrightarrow{\approx \theta_W} & H^{2n}(W, W-f^{-1}(X)) \\ \rho \downarrow \quad \swarrow \sigma \quad \downarrow & & \downarrow (\text{restr.})^* \\ H^{2n}(U, U-M_j^!) \oplus H^{2n}(U, U-N_j^!) & \xrightarrow{\approx \theta_U} & H^{2n}(U, U-f^{-1}(X)) , \end{array}$$

Notre assertion résulte immédiatement de ce que σ est nulle, et ρ envoie $[M]_W$ sur $[M_j^!]_U$.

Propriété 1 : Si W est un produit $F \times V$, où F est une variété connexe, et si f est la deuxième projection, il est clair que $f^{-1}(X)$ tout entier est une composante irréductible propre, et que $\mu(X, f; f^{-1}(X))$ vaut 1.

Propriété 2 : Si W est une variété de dimension n , et f une immersion de W dans V telle que $f^{-1}(X)$ soit réduit à un seul point x , si de plus $f(x)$ est un point régulier de X , et si f et X sont transverses en $f(x)$, on a évidemment

$$\mu(X, f; x) = 1.$$

Propriété 3 : Dans la situation précédente, abandonnons les hypothèses de régularité et de transversalité : nous pouvons supposer (en nous plaçant dans une carte) que W est un sous-espace affine de V , rencontrant X en un point isolé x . Nous pouvons encore donner une interprétation simple de $\mu(X, f; x)$: si W' est un quelconque supplémentaire topologique de W , nous savons que X peut être (au voisinage de x) décrit comme revêtement ramifié au-dessus de W' ; $\mu(X, f; x)$ n'est autre que le degré de ce revêtement.

En effet, choisissons une boule B de W centrée en x , et un ouvert Ω de W' tel que x appartienne à $\Omega \times B$, mais que $\Omega \times \partial B$ ne rencontre pas X . Prenons la trace de $[X]_V$ sur $\Omega \times (W, W-B)$, puis sur $a \times (W, W-B)$ et sur $b \times (W, W-B)$, où a est tel que x appartienne à $a \times B$, et b tel que $b \times B$ coupe X en des points réguliers seulement, et transversalement. D'après la propriété 2, cette dernière trace vaut d fois le générateur canonique de $H^{2n}(b \times (W, W-B); \mathbb{Z})$. D'où la conclusion.

Propriété 4 : Transitivité des multiplicités d'image réciproque. Soit $T \xrightarrow{g} W \xrightarrow{f} V$ une suite de variétés et d'applications analytiques, X un sous-ensemble analytique de V de codimension pure n , Y sa contre-image dans W , et Z la contre-image de Y dans T . Supposons que Z ait (au moins) une composante irréductible M de codimension n . Soient P^i ($i \in I$)

les composantes de Y telles que $g^{-1}(P_i)$ contienne M . Alors I est fini, les P_i sont nécessairement des composantes propres de $f^{-1}(X)$, M est une composante propre de chaque $g^{-1}(P_i)$, et l'on a

$$\mu(X, f \circ g; M) = \sum_{i \in I} \mu(X, f; P_i) \mu(P_i, g; M)$$

Si $x \in M$, tous les P_i passent par $g(x)$; donc I est fini.

Les assertions de propreté résultent de considérations sur la codimension. Pour démontrer la dernière, on pourrait se localiser en un point qui n'appartienne à aucune autre composante de Z que M . Nous procéderons plutôt ainsi : soit N la réunion des composantes de Z autres que M , et Q la réunion des composantes de Y autres que les P_i . Remarquons d'abord que $g^{-1}(Q)$ est contenu dans N (sinon, une composante au moins de $g^{-1}(Q)$ serait strictement contenue dans M , ce qui est absurde pour une raison de codimension). Ceci entraîne, avec les notations du diagramme ci-dessus, la nullité de $\pi_2 \circ g^*(\text{Ker } \pi_1)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{2n}(T, T-M) & \xleftarrow{\pi_2 g^* \sigma_1} & \oplus & H^{2n}(W, W-P_i) & \\
 \uparrow \pi_2 & & & \downarrow \sigma_1 & \uparrow \pi_1 \\
 H^{2n}(T, T-M) & & \oplus & H^{2n}(W, W-P_i) & \\
 \oplus & \xleftarrow{g^*} & \oplus & & \\
 H^{2n}(T, T-N) & & & H^{2n}(W, W-Q) &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow \pi_1 f^* \\
 \searrow f^*
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 H^{2n}(V, V-X)
 \end{array}$$

On a alors $\pi_2 g^* f^* = (\pi_2 g^* \sigma_1)(\pi_1 f^*)$, ce qui est équivalent à la formule proposée.

Propriété 5 : Les multiplicités ici introduites sont des entiers strictement positifs. Elles sont les seules vérifiant les propriétés 0, 1, 3 et la propriété 4 dans le cas particulier où $Z=M$, $Y = 1$ 'un des P_i , et g est une immersion.

En effet, si nous voulons calculer une multiplicité $\mu(X, f; M)$, restreignons-nous (Prop. 0) à un ouvert de W sur lequel la trace de $f^{-1}(X)$ ne soit pas plus grande que la trace de M (notons encore W cet ouvert). Factorisons f par l'injection "graphe" γ de W dans $W \times V$, et la deuxième projection de $W \times V$. D'après les propriétés 3 et 4 faible, nous sommes ramenés au calcul de $\mu(W \times X, \gamma; M)$. Soit alors i une injection dans W d'un ouvert de $\mathbb{A}^n$, telle que $i^{-1}f^{-1}(X) = \emptyset$. La propriété 3 nous donne $\mu(W \times X, \gamma \circ i; 0)$ et $\mu(f^{-1}(X), i; 0)$. On conclut alors à l'aide de la propriété 4 faible.

Nous allons maintenant étudier les intersections de sous-ensembles de codimension finie. Nous dirons ensuite quelques mots de l'intersection d'un sous-ensemble de codimension finie et d'un sous-ensemble de dimension finie.

Si X et Y sont deux sous-ensembles de V de codimensions pures n et p respectivement, soit P une composante irréductible de $X \cap Y$ de codimension $n+p$ (composante propre) et Q la réunion des autres composantes. Le produit $X \times Y$ est un sous-ensemble irréductible de codimension $n+p$ de $V \times V$, et, si nous appelons Δ l'injection diagonale de V dans $V \times V$, les P_i sont aussi bien les composantes propres de $\Delta^{-1}(X \times Y)$.

Définition 3 : Nous appellerons multiplicité de l'intersection de X et Y le long de P_i , et nous noterons $\mu(X, Y; P)$, l'entier positif $\mu(X \times Y, \Delta; P)$.

Considérant que $[X \times Y]_{V \times V}$ est le cup-produit externe de $[X]_V$ et $[Y]_V$ (ce qui se voit en se débarrassant d'abord des singularités), nous pouvons donner la définition équivalente :

Définition 3 bis : Soit θ le morphisme naturel

$$\theta : H^{2n+2p}(V, V-P) \otimes H^{2n+2p}(V, V-Q) \longrightarrow H^{2n+2p}(V, V-X \cap Y),$$

qui est un isomorphisme (Mayer-Vietoris et Prop. I.4). Nous

appellerons multiplicité d'intersection de X et Y le long de P la coordonnée suivant $[P]_V$ de $\theta^{-1}([X]_V \cup [Y]_V)$.

Propriété 0 bis : La notion de multiplicité d'intersection est locale (cf. Prop.0 pour le sens précis de cette assertion).

Propriété 6 : $\mu(X, Y; P) = \mu(Y, X; P)$!

Propriété 7 : Si X et Y sont contenus dans une sous-variété W de V , et si M est une composante propre, de multiplicité μ , de l'intersection de X et Y considérés comme sous-ensembles de W , la formule (2) donne immédiatement

$$\mu[M]_V \cup [W]_V + \gamma = [\bar{X}]_V \cup [\bar{Y}]_V,$$

où γ est une classe à support dans la réunion N des composantes de $X \cap Y$ autres que M .

Propriété 8 : Associativité.

Soient X, Y, Z trois sous-ensembles analytiques de V , de codimensions pures n, p, q respectivement. Supposons que $X \cap Y \cap Z$ ait (au moins) une composante irréductible M de codimension $n+p+q$. Alors, les composantes P_i (resp. R_j) de $X \cap Y$ (resp. de $Y \cap Z$) qui contiennent M sont en nombre fini, et toutes sont propres dans $X \cap Y$ (resp. dans $Y \cap Z$), M est une composante propre de chaque $P_i \cap Z$ (resp. $X \cap R_j$), et on a l'égalité

$$\sum_i \mu(X, Y; P_i) \mu(P_i, Z; M) = \sum_j \mu(X, R_j; M) \mu(Y, Z; R_j)$$

Pour démontrer la formule, appelons Q la réunion des composantes de $X \cap Y$ autres que les P_i , et N la réunion des composantes de $X \cap Y \cap Z$ autres que M . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{2n+2p}(V, V-X \cap Y) & \xleftarrow{\approx} & \oplus H^{2n+2p}(V, V-P_i) & \oplus & H^{2n+2p}(V, V-Q) \\
 \downarrow U[Z]_V & & \downarrow & \swarrow \text{dashed} & \downarrow \\
 H^{2n+2p+2q}(V, V-X \cap Y \cap Z) & \xleftarrow{\omega \approx} & H^{2n+2p+2q}(V, V-M) & \oplus & H^{2n+2p+2q}(V, V-N)
 \end{array}$$

que les flèches verticales de droite rendent commutatif par hypothèse. En fait, la flèche en pointillé est nulle car $Q \cap Z$ est contenu dans N (sinon, une composante irréductible de $Q \cap Z$ serait strictement contenue dans M). Il en résulte que $\sum_i \mu(X, Y; P_i) \mu(P_i, Z; M)$ est simplement la coordonnée suivant $[M]_V$ de $\omega^{-1}([X] \cup [Y] \cup [Z])$, d'où l'associativité désirée.

Propriété 9 : Compatibilité des multiplicités d'intersection et d'image réciproque.

Soient X, Y de codimensions pures n, p dans V , f un morphisme de W dans V , et M une composante de $f^{-1}(X \cap Y)$ de codimension $n+p$, s'il en existe une. Appelons P_i (resp. Q_j) les composantes de $f^{-1}(X)$ (resp. $f^{-1}(Y)$) qui contiennent M . Appelons R_k les composantes de $X \cap Y$ dont la contre-image par f contient M . Pour ne pas lasser le lecteur, nous ne lui imposerons pas la démonstration de la formule

$$\sum_k \mu(X, Y; R_k) \mu(R_k, f; M) = \sum_{i,j} \mu(X, f; P_i) \mu(Y, f; Q_j) \mu(P_i, Q_j; M)$$

(où l'on peut s'assurer facilement que les ensembles d'indice sont finis, et tous les symboles définis).

Propriété 10 : Il y a un cas où nous aurions pu ramener une multiplicité d'image réciproque à une multiplicité d'intersection: c'est le cas où l'application f est épidermique. En effet, localement dans W , il existe alors un entier q tel que f puisse se factoriser par une injection (épidermique) de W dans

$\mathbb{C}^q \times V$ et par la deuxième projection de $\mathbb{C}^q \times V$. D'après la propriété 1 (et 0!), nous pouvons même nous restreindre au cas où f est l'injection α dans V d'une sous-variété Y de codimension p . Soient X un sous-ensemble irréductible de V de codimension n , M une composante propre de $\alpha^{-1}(X) = X \cap Y$, et N la réunion des autres composantes du même. D'après la construction de $\alpha_!$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & \alpha^* \nearrow & H^{2n}(Y, Y-Y \cap X) & \xleftarrow{\approx} & H^{2n}(Y, Y-M) \oplus H^{2n}(Y, Y-N) \\
 H^{2n}(V, V-X) & & \downarrow \alpha_! & & \downarrow \alpha_! \\
 \cup [Y]_V \searrow & & H^{2n+2p}(V, V-Y \cap X) & \xleftarrow{\approx} & H^{2n+2p}(V, V-M) \oplus H^{2n+2p}(V, V-N)
 \end{array}$$

Alors, l'égalité $\alpha_! [M]_Y = [M]_V$ entraîne l'égalité des multiplis-
cités $\mu(X, \alpha; M)$ et $\mu(X, Y; M)$.

Passons maintenant à une situation dissymétrique : l'inter-
section d'un sous-ensemble X de codimension finie et d'un sous-
ensemble K de dimension finie, c'est-à-dire d'un sous-ensemble
analytique admettant localement pour modèle un sous-ensemble
analytique d'un $\mathbb{C}^q$. Tout sous-ensemble analytique L de K
est encore de dimension finie ; on peut définir sans difficulté
des composantes irréductibles globales de K , qui sont des
variétés $\mathbb{Z}$ -orientables, à singularités de codimension 2 ; si une
telle composante K' est de dimension m , le groupe $H_m(K'; \mathbb{Z})$
est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$, le générateur étant la classe
fondamentale $\{K'\}$ définie dans [10] (il s'agit d'homologie à
supports fermés quelconques).

Soit donc X un sous-ensemble irréductible de codimension n
de V , et K un sous-ensemble irréductible de dimension p
(au moins égale à n , sinon, nous n'avons rien à dire). Toutes
les composantes irréductibles de $X \cap K$ ont une dimension au moins
égale à $p-n$, comme on le voit en prenant un modèle local de K .
Soit L une composante irréductible de $X \cap K$ de dimension égale
à $p-n$ (s'il y en a ; nous dirons alors que L est une composante

propre de l'intersection) , et soit M la réunion des autres composantes de $X \cap K$. Alors, $L \cap M$ est de dimension strictement plus petite que $p-n$, et la suite de Mayer-Vietoris nous dit que le morphisme naturel

$$\theta : H_{p-n}(L; \mathbb{Z}) \oplus H_{p-n}(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{p-n}(X \cap K; \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Mais le terme de droite est égal à $H_{p-n}^{X \cap K}(V; \mathbb{Z})$, et contient un élément privilégié, le cap-produit $\{K\}_V \cap [X]_V$, où $\{K\}_V$ est considéré comme un élément de $H_p^K(V; \mathbb{Z})$. D'où la

Définition 4 : Nous appellerons multiplicité d'intersection de X et K le long de L , et nous noterons $\mu(K, X; L)$, la coordonnée suivant $\{L\}$ de $\theta^{-1}(\{K\}_V \cap [X]_V)$.

Nous ne nous appesantirons pas sur les propriétés de cette multiplicité. Nous devons toutefois vérifier une compatibilité avec les définitions précédentes, c'est-à-dire envisager le cas où K est une sous-variété de dimension finie de V , ou plus généralement est contenu dans une telle sous-variété W . Si les P_i (en nombre fini) sont alors les composantes de $X \cap W$ contenant L , elles sont automatiquement propres, et nous avons envie de poser

$$\mu(K, X; L) = \sum_i \mu(K, P_i; L) \mu(X, \alpha; P_i) ,$$

où les $\mu(K, P_i; L)$ sont des multiplicités d'intersection d'ensembles de codimension finie, et où α désigne l'injection de W dans V . De façon abrégée, nous devons vérifier que le "rapport" de $[K] \cup \alpha^*[X]$ à $[L]$ est égal au rapport de $\{K\} \cap [X]$ à $\{L\}$. On passe de l'une à l'autre situation par la dualité de Poincaré ; explicitement, on a les égalités

$$\{W\} \cap [L] = \{L\}$$

$$\{W\} \cap ([K] \cup \alpha^*[X]) = (\{W\} \cap [K]) \cap \alpha^*[X] = \{K\} \cap [X] .$$

Dans le cas où l'image de tout germe d'application analytique finie d'un $\mathbb{C}^n$ dans V est contenue dans un germe de sous-variété analytique de dimension finie de V (p. ex.: si V est modelée sur un Hilbert - cf. chapitre IIIbis), on aurait pu définir toutes les multiplicités que nous étudions ici sans l'aide du cap-produit : les définitions données auraient été indépendantes de la variété de dimension finie intermédiaire, W ou W' , comme on l'aurait vu par le truchement d'une troisième variété de dimension finie contenant W et W' (il en existe toujours, dans l'hypothèse envisagée).

BIBLIOGRAPHIE

Celle du chapitre I, à laquelle il faut adjoindre :

- [10] BOREL-HAEFLIGER : La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique ; Bull. Soc. Math. France, t.89, 1961, p.461.
- [11] LANG : Introduction to differentiable manifolds, Intersc. Pub., 1962.
- [12] MALGRANGE : Propriétés différentiables des ensembles analytiques ; Séminaire Cartan 1962-63, exposé 13, page 3.

Exposé n° 16 : UN THEOREME D'IMAGE DIRECTE (SITUATION ANALYTIQUE
(chapitre III) EPIDERMIQUE)

Nous reprenons la situation exposée dans la Proposition I.13: c'est-à-dire que f est une application analytique épidermique^(**) d'une variété analytique banachique V dans une autre W , X est un sous-ensemble analytique de codimension finie de V , tel que la restriction g de f à X soit propre. Nous allons démontrer le théorème suivant^(*), analogue au théorème de Remmert :

Théorème 1 : Dans la situation rappelée ci-dessus, et si de plus l'ensemble X est de définition finie, $f(X)$ est un sous-ensemble analytique de définition finie de W , et l'on a

$$\text{codim}_y f(X) = \inf_{x \in g^{-1}(y)} \text{codim}_x g .$$

Remarquons tout de suite qu'il suffit de démontrer cet énoncé sans se préoccuper des codimensions. La proposition I.13 nous a déjà dit, en effet, que la codimension topologique en y du fermé $f(X)$ est $2 \inf_{x \in g^{-1}(y)} \text{codim}_x g$. On peut également se ramener au cas où X est irréductible : en effet, puisque $g^{-1}(y)$

(*) La démonstration de ce théorème, qui a commencé d'ailleurs au chapitre I, a été faite en collaboration avec Jean-Pierre Ramis.

(**) Si f est une telle application, et si le point x de V est isolé dans $f^{-1}f(x)$, alors f^* fait de $\mathcal{O}_x(V)$ un $\mathcal{O}_{f(x)}(W)$ -module de type fini. Indiquons que cette propriété n'est pas vraie pour n'importe quelle application analytique : si f est une application linéaire continue de E dans F (espaces de Banach),

est compact, il possède un voisinage V' réunion d'un nombre fini de petites boules de V , qui ne rencontre donc qu'un nombre fini de composantes irréductibles globales de X , soient X_i ($i \in I$). La propriété de g entraîne l'existence d'un voisinage W' de y tel que $g^{-1}(W')$ soit contenu dans V' . La trace de $f(X)$ sur W' est donc la réunion des traces des $f(X_i)$; or, l'application $g|_{X_i}$ est propre, tout autant que g . Enfin, si X est irréductible, on se convainc facilement que $f(X)$ ne peut qu'être irréductible, donc de définition finie (puisque de codimension finie).

Si, dans un espace de Banach E , tout fermé qui rencontre tout sous-espace de dimension finie de E suivant un sous-ensemble analytique était automatiquement analytique, il n'y aurait rien de plus à démontrer que le Lemme I.12. Il n'en est heureusement rien : considérons, dans (un voisinage de l'origine de) $\ell^2(\mathbb{C})$, l'ensemble Y des points de coordonnées $(t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots)$, t étant réel. On voit facilement que la trace de Y sur tout plan de dimension finie est un ensemble fini. Pourtant, Y n'est pas analytique, car il n'est pas un sous-ensemble analytique de la sous-variété d'équations paramétriques $(z, z^2, z^3, \dots, z^n, \dots)$, où z est complexe.

1er Etage de la démonstration : Nous allons examiner le cas où la codimension de g est nulle, et démontrer qu'alors, si W est

suite de la note (**), page 16.1.

il est nécessaire pour que f^* fasse de $\mathcal{O}_0(E)$ un $\mathcal{O}_0(F)$ module de type fini que f soit injective d'image fermée. En effet, supposons que f soit linéaire injective d'image non fermée, et que $\phi_1 \dots \phi_n$ engendrent $\mathcal{O}_0(E)$ sur $\mathcal{O}_0(F)$. Les ϕ_n convergent dans une même boule de E , de rayon R . Soit $\phi = \sum \phi_n f^*(u_n)$ un germe quelconque de $\mathcal{O}_0(E)$. Les u_n convergent dans une même boule de F : il existe donc r tel que, si $u_n = \sum_p \pi_n^p$, on ait, pour tout n , $\sum_p \|\pi_n^p\|_F r^p < \infty$. Or, il existe une droite complexe D de E telle que, pour $z \in D$, on ait $\|f(z)\|_F \leq \frac{r}{R} \|z\|_E$ (sinon, l'image de f serait fermée). En ce qui concerne les restrictions à D , on a $\|f^* \pi_n^p\|_E \leq \left(\frac{r}{R}\right)^p \|\pi_n^p\|_F$. Donc,

connexe, $g(X)$ est égal à W .

Par hypothèse, il y a un point a de X où le corang de g est nul. Alors, X est nécessairement de codimension finie en a ; soit Y une composante irréductible globale de X passant par a , de codimension la plus petite possible. Le corang en a de $g|_Y$ est nécessairement inférieur ou égal à $\text{corg}_a g$; il est donc nul, ainsi que la codimension de $g|_Y$. Nous sommes ainsi ramenés au cas où X est irréductible de codimension finie (sans avoir fait au départ d'hypothèse de définition finie sur X). Dans ce cas, l'ensemble singulier SX de X est analytique. Si la codimension de $g|_{SX}$ est strictement positive, tout va bien. Sinon, nous ne nous intéressons plus qu'à $g|_{SX}$ et nous recommençons le travail décrit dans ce paragraphe. Comme les codimensions des ensembles auxquels nous restreignons g vont en croissant strictement, nous arriverons nécessairement à nous ramener à la situation suivante : X irréductible de codimension finie, $\text{codim } g = 0$, et $\text{codim } g|_{SX} > 0$.

Alors, $g(SX)$ est un fermé de W de codimension topologique au moins égale à 2, d'après la Proposition I.13. Considérons l'application g restreinte à la variété $X' = X - g^{-1}g(SX)$, l'espace but étant $W' = W - g(SX)$. Cette application est propre, analytique, épidermique. L'ensemble Γ de ses points critiques est un sous-ensemble analytique de X' , et, d'après le théorème de Sard, $g(\Gamma)$ est un fermé de W' sans point intérieur (ceci est une variante du théorème de Sard-Smale [13]). Mais alors, la codimension de $g|_\Gamma$ ne peut pas être nulle, car on aurait, d'après la Proposition I.13, $\text{cotop } g(\Gamma) = 0$. Elle est donc au

fin de la note (**), page 16.2

$\sum \|f^* \pi_n^P\|_E R^P \leq \sum \|\pi_n^P\|_F r^P < \infty$. La restriction à D des $f^*(u_n)$, et par suite de ϕ , a donc un rayon de convergence au moins égal à R : ainsi, il existerait un R tel que, pour tout germe $\phi \in \mathcal{O}_0(E)$, on pourrait trouver un plan de E sur lequel la restriction de ϕ aurait un rayon de convergence au moins égal à R ; ceci est absurde.

moins égale à 1, et $\text{cotop } g(\Gamma)$ est au moins égal à 2. Il résulte alors de la Proposition I.6 que la codimension topologique de $g(SX) \cup g(\Gamma)$ est au moins égale à 2, ce qui entraîne que Γ n'est pas X' tout entier, puisque l'on sait que la codimension topologique de $g(X)$ est nulle. D'après le théorème du rang constant, $g(X' - \Gamma)$ est alors un ouvert non vide, soit Ω , de W' . Dans W , le fermé $g(X)$ est la réunion de Ω et de $g(SX) \cup g(\Gamma)$. Donc, le fermé $g(X) - \Omega$ est de codimension topologique au moins égale à 2 (Prop. I.5) ; son complémentaire $\Omega \cup \left[g(X) \right]$ doit être connexe (Cor. I.2), ce qui entraîne la vacuité de $\left[g(X) \right]$.

La démonstration comportera encore deux étages de forme semblable à celle du premier, mais utilisant un argument de prolongement que nous allons présenter maintenant. Rappelons d'abord un résultat de [3] :

Proposition 2 : Soit (E', E'') une décomposition directe d'un espace de Banach E , avec $\dim E'' = p$. Soit $\Delta = \delta' \times \delta''$ un bidisque ouvert de centre 0 associé à (E', E'') . Soient ε un nombre réel strictement compris entre 0 et le rayon r'' de δ'' , et Δ_ε le produit de δ' par la couronne $r'' - \varepsilon < \|x''\| < r''$ de E'' . Supposons que A soit un ensemble négligeable de δ' , et X un sous-ensemble analytique non vide de $(\delta' - A) \times \delta''$, de codimension p en tout point, ne rencontrant pas Δ_ε . Alors, l'adhérence de X est un sous-ensemble analytique de Δ , de codimension p en tout point.

Donnons aussi deux conséquences immédiates du Lemme I.12.

Lemme 3 : Dans la situation de la proposition I.13, si y est un point de W et P un plan de W (pour une carte en y) tel que y soit isolé dans $g(X) \cap P$, il existe un plan P' contenant P , de dimension complexe $\text{codim } g$, tel que y soit isolé dans $g(X) \cap P'$.

Lemme 4 : Toujours sous les hypothèses de I.13, si la codimension de g est strictement positive, $g(X)$ est un sous-ensemble négligeable de W .

Démonstration : La situation étant locale, plaçons-nous dans une carte de W . Si ϕ est une fonction scalaire analytique dans $W-g(X)$ et bornée, pour la prolonger à un point a de $g(X)$, on considère sa restriction à un quelconque plan de W , passant par a , de dimension finie, tel que la trace de $g(X)$ sur ce plan soit de codimension strictement positive. Le prolongement ne dépend pas du plan choisi, et on obtient ainsi une fonction $\tilde{\phi}$ sur W , bornée, dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie est analytique : $\tilde{\phi}$ est analytique.

Enonçons maintenant l'argument de prolongement que nous utiliserons.

Proposition 3 : Soit X un sous-ensemble irréductible de codimension finie de V , f une application analytique épidermique de V dans W , telle que la restriction g de f à X soit propre, de codimension p . Soit Y un sous-ensemble analytique de X tel que $\text{codim } g|_Y > p$ et que $f(X) - f(Y)$ soit un sous-ensemble analytique de $W-f(Y)$ de codimension p en tout point. Alors, $f(X)$ est un sous-ensemble analytique de W de codimension p en tout point ; $f(X)$ est d'ailleurs l'adhérence de $f(X)-f(Y)$ dans W .

Démonstration : La question étant locale dans W , supposons que W est un ouvert d'un espace de Banach E , et que nous étudions $f(X)$ au voisinage de l'origine, censée appartenir à $f(Y)$. D'après le lemme 3, il existe un sous-espace E'' de E , de dimension p , tel que 0 soit isolé dans $E'' \cap f(X)$. Il y a alors une sphère S de E'' , centrée à l'origine, qui ne rencontre pas $f(X)$; puisque $f(X)$ est fermé, il existe un voisinage de S dans E qui ne rencontre pas $f(X)$, donc, si nous avons choisi un supplémentaire topologique E' de E'' , un ensemble du type Δ_e (cf. Prop.2) qui ne rencontre pas $f(X)$. Désormais, nous considérerons que W est Δ , que V est $f^{-1}(\Delta)$. L'ensemble X n'est plus alors irréductible, mais, si les X_i sont ses composantes irréductibles, on a, pour tout i , $\text{codim } f|_{X_i} = p$ (Lemme I.11). Appelons π la

projection de Δ sur δ' parallèlement à δ'' ; les fibres de $\pi|_{f(X_i)}$ ou de $\pi|_{f(Y)}$ sont des sous-ensembles analytiques (Remmert classique) relativement compacts ($f(X) \cap \Delta_\epsilon = \emptyset$) d'espaces de dimension finie : elles sont donc finies. Il en résulte que la profondeur de $\pi \circ f|_{X_i}$ est égale à celle de $f|_{X_i}$, et que la profondeur de $\pi \circ f|_Y$ est au moins égale à celle de $f|_Y$. Ainsi, la codimension de $\pi \circ f|_{X_i}$ est nulle, et, d'après l'étage 1, π est une surjection de $f(X_i)$ sur δ' ; la codimension de $\pi \circ f|_Y$ est au moins égale à 1, et, d'après le lemme 4, $\pi \circ f(Y)$ est négligeable dans δ' . La proposition 2 nous dit alors que l'adhérence de $f(X) - \pi^{-1} \pi f(Y)$ est un sous-ensemble analytique Z de Δ de codimension p en tout point. Nous devons, pour conclure, montrer que $g^{-1}(Z)$, qui est un sous-ensemble analytique de $f^{-1}(\Delta)$, contient X ; ceci est vrai, puisqu'il contient $X_i - f^{-1} \pi^{-1} \pi f(Y)$, qui est un ouvert non vide de la composante arbitraire X_i de X .

2ème étage de la démonstration : A - Le théorème est vrai pour X lisse connexe, et $\text{prof } g = 0$.

Soit Γ l'ensemble des points de la variété X où la différentielle de g n'est pas de rang maximum : c'est un sous-ensemble analytique strict de X . Si x est un point de Γ , on a

$$\text{corg}_X f|_\Gamma = \text{codim}_X \Gamma + \text{prof}_X f|_\Gamma - \inf f'(x) > \text{codim}_X X - \inf f'(x).$$

Si p est la codimension de g , la codimension de $g|_\Gamma$ est donc strictement plus grande que p . D'autre part, le théorème du rang constant nous dit que $f(X - f^{-1} f(\Gamma))$ est un sous-ensemble analytique de codimension p en tout point de $W - f(\Gamma)$. La proposition 3 donne alors l'assertion A.

B - Le théorème est vrai pour X irréductible, et $\text{prof } g = 0$.

Appelons S l'ensemble singulier de X , qui est analytique, et p la codimension de g . Comme ci-dessus, on voit que la codimension de $g|_S$ est strictement plus grande que p . Ceci interdit que X soit contenu dans $f^{-1}f(S)$. Si nous restreignons f en une application f' de $V - f^{-1}f(S)$ dans $W - f(S)$, la restriction de f' à la sous-variété $X - f^{-1}f(S)$, qui est propre, a pour codimension p (Lemme I.11). L'assertion A et la proposition 3 donnent alors l'assertion B .

3ème étage : Nous allons procéder par récurrence sur la profondeur de g , l'étage 2 constituant le démarreur de la récurrence. Supposons donc traité le cas où $\text{prof } g$ est inférieure ou égale à $n-1$:

A - Le théorème est vrai pour X lisse connexe, et $\text{prof } g = n$.

Gardons à Γ et à p les mêmes significations qu'au 2ème A. Si la codimension de $g|_{\Gamma}$ est plus grande que p , le problème a déjà été résolu. Sinon, soit L une composante irréductible de Γ telle que $\text{codim } g|_L = p$. La codimension de L étant strictement plus grande que celle de X , la profondeur de $g|_L$ est strictement plus petite que celle de g , et l'hypothèse de récurrence affirme que $g(L)$ est un sous-ensemble analytique de W , irréductible, de codimension p . Appelons Z la contre-image de $g(L)$ par g , et i l'indice de f , qui est constant au voisinage de X ; nous voulons montrer que Z est X tout entier. Soit a un point quelconque de Z . Nous avons les égalités

$$\text{corg}_a f|_Z = \text{codim}_a Z + \text{prof}_a f|_Z - i$$

$$p = \text{corg } g = \text{codim } X + \text{prof } g - i$$

Puisque Z est saturé pour g , $\text{prof}_a f|_Z$ est égal à $\text{prof}_a g$, donc est au moins égal à $\text{prof } g$. D'autre part, $\text{corg}_a f|_Z$ est au moins égal à $\text{codim}_a f|_Z = \frac{1}{2} \text{cotop}_{f(a)} f(Z) = p$. Choisissons a de façon à avoir l'égalité (prenons a tel que $\text{corg}_a f|_Z$ soit le plus petit possible). Nous avons alors

$$\text{codim}_a Z \leq i+p - \text{prof } g = \text{codim } X.$$

Ceci entraîne l'égalité de Z et X , donc de $g(L)$ et $g(X)$.

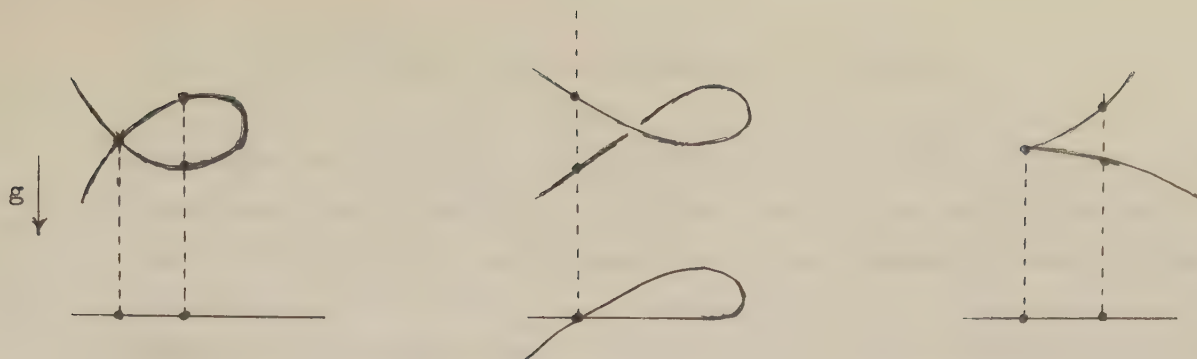
B - Le théorème est vrai pour X irréductible, et $\text{prof } g = n$.

Comme au 2ème B, si la codimension de $g|_S$ est strictement plus grande que p , le problème est résolu, à l'aide du 3ème A. Sinon, on recopie la démonstration qui précède, réutilisant ainsi l'hypothèse de récurrence.

Multiplicité d'image directe - Formule de projection.

Soit X un sous-ensemble analytique irréductible de codimension finie n d'une variété analytique banachique connexe V . Soient f une application analytique i -dermique de V dans une autre variété W , et g la restriction de f à X . Supposons que g soit propre, et que la profondeur de g soit nulle; nous allons alors définir la multiplicité de l'image directe de X par g , entier positif que nous noterons $v(X, g)$.

Si a est un point quelconque de $g(X)$, la fibre $g^{-1}(a)$ est un sous-ensemble analytique compact d'une sous-variété analytique de dimension finie de V : elle a donc un nombre fini de composantes connexes (qui sont d'ailleurs analytiques), soit $v(a)$. Il ne faudrait pas croire que cette fonction soit toujours s.c.s., ou toujours s.c.i., même si les fibres de g sont discrètes, comme le montre le dessin à la page ci-contre :



Toutefois, la restriction de la fonction v à un quelconque ouvert de points irréductibles de $g(X)$ (par exemple à la partie régulière de $g(X)$) est semi-continue inférieurement : soient en effet K_i les composantes connexes de $g^{-1}(a)$, U_i des voisinages ouverts disjoints des K_i , w un voisinage de a tel que $g^{-1}(w)$ soit contenu dans la réunion des U_i , X_i la trace de X sur $U_i \cap g^{-1}(w)$; on vérifie facilement, à l'aide du théorème 1, que $g(X_i)$ est un sous-ensemble analytique de w , de même codimension en a que $g(X)$; $g(X_i)$ est donc égal à $g(X)$, et, pour tout point b de $w \cap g(X)$, $g^{-1}(b)$ contient au moins un point dans chaque U_i .

Si la profondeur de g est nulle,

Définition : nous appellerons multiplicité de l'image directe de X par g le maximum de la restriction de la fonction v à un quelconque ouvert de points irréductibles de $g(X)$. Sinon, nous dirons que cette multiplicité est nulle.

Si nous conservons les notations de la démonstration du théorème 1, la restriction de g à $X - g^{-1}g(S) - g^{-1}g(\Gamma)$ est une immersion propre dans $W - g(S) - g(\Gamma)$, d'image analytique T . La restriction de g à $X - g^{-1}g(S) - g^{-1}g(\Gamma) - g^{-1}(\text{Sing } T)$ est donc un revêtement de $T - \text{Sing } T$, qui est connexe. Le degré de ce revêtement est la multiplicité $v(X, g)$.

Proposition 6. Si W' est une troisième variété, f' une application analytique de W dans W' , j -dérivée au voisinage de $g(X)$, et telle que la restriction g' de f' à $g(X)$ soit propre, de profondeur nulle, on a (immédiatement)

$$v(X, g' \circ g) = v(g(X), g') \cdot v(X, g) .$$

Décrivons maintenant la situation dans laquelle nous allons démontrer une formule de projection : nous rajouterons à la figure (V, f, W, X) précédente un sous-ensemble analytique irréductible Y de W , de codimension p . Appelons P_i les composantes propres de $f^{-1}(Y)$, Q_{ij} les composantes propres de $P_i \cap X$, et R_k les composantes propres de $Y \cap g(X)$. Nous voulons démontrer l'égalité

$$(1) \quad \sum_{i,j} \mu(Y, f; P_i) \mu(P_i, X; Q_{ij}) v(Q_{ij}, f) f(Q_{ij}) = \sum_k v(X, f) \mu(Y, f(X); R_k) R_k$$

(les sommes écrites sont finies au-dessus d'ouverts assez petits de W).

Cette égalité n'est vraisemblable que si toutes les composantes de $f^{-1}(Y)$ sont propres (prendre pour V et X l'espace $\mathbb{C}^2$ dans lequel on a fait éclater l'origine, pour f la projection canonique sur $\mathbb{C}^2$, Y étant l'origine de $\mathbb{C}^2$). On voit de même qu'il faut supposer propres toutes les composantes des $P_i \cap X$ (gardant le triplet V, f, W précédent, prendre pour Y une droite de $\mathbb{C}^2$ passant par 0 , et pour X la contre-image par f d'une autre droite passant par 0). Lorsque toutes ces hypothèses de propriété sont réalisées, les composantes propres de $Y \cap f(X)$ sont les images par f des Q_{ij} telles que la profondeur de $f|_{Q_{ij}}$ soit nulle ; les autres composantes de $Y \cap f(X)$ devraient être trop grandes, mais, étant images de Q_{ij} telles que la profondeur de $f|_{Q_{ij}}$ soit positive, elles ne peuvent qu'être trop petites. D'où le début de l'énoncé :

Proposition 7. Dans la situation $(X \subset V, f, W \supset Y)$ décrite plus haut, si toutes les composantes de $f^{-1}(Y) \cap X$ sont de codimension $n+p$, alors toutes les composantes de $f(X) \cap Y$ sont propres, et l'égalité (1) est vérifiée.

Démonstration de (1) : La formule est évidemment locale sur W . Nous pouvons ainsi supposer qu'il y a un seul R_k , qu'il est régulier, et que les Q_{ij} en forment un revêtement trivial. Nous pouvons alors nous localiser aussi sur V , et par suite factoriser f par un plongement τ suivi d'une projection π propre, et même finie, sur $\tau(X)$ (π et τ étant épidermiques). On vérifie immédiatement qu'il suffit de démontrer la formule de projection pour τ et π successivement. D'où l'examen des deux cas :

1°) f est un plongement : Toutes les multiplicités d'image directe sont alors égales à 1, et nous devons simplement vérifier, dans le cas où Y coupe la sous-variété V suivant des ensembles irréductibles P_i en nombre fini, les P_i coupant X suivant le même ensemble irréductible Q , la formule

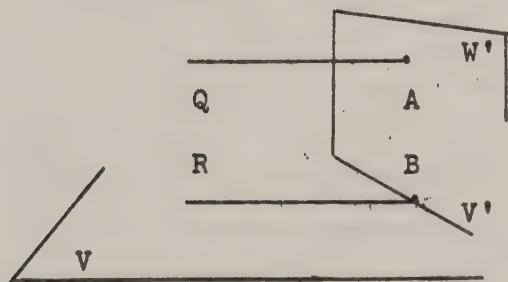
$$\sum_i \mu(Y, f; P_i) \mu(P_i, X; Q) = \mu(Y, f(X); Q)$$

C'est une généralisation de la propriété II.10, qui tient simplement à la formule II(1)

$$f_1([X]_V \cup f^*[Y]_W) = f_1[X]_V \cup [Y]_W,$$

et aux égalités $f_1[X]_V = [f(X)]_W$, $f_1[Q]_V = [f(Q)]_W$.

2°) f est une projection : La situation est symbolisée



par le dessin ci-contre (l'espace ambiant est $W = V \times \mathbb{C}^q$, $R \approx Q$ sont des sous-variétés). Choisissons un plan de dimension finie V' transverse à R , et soit $W' = f^{-1}(V')$. Appelons X'_ℓ les composantes de $X \cap W'$, et Y'_m celles de $Y \cap V'$. Les appli-

cations $f_{X'}$, étant finies (comme f_X), et les intersections.

$f(X'_\ell) \cap Y'_m$ étant réduites au point B , toutes les composantes X'_ℓ et Y'_m sont propres. Appliquons la propriété II.9 :

$$\mu(X, f^{-1}(Y); Q) = \sum_{\ell, m} \mu(X, W'; X'_\ell) \mu(Y, V'; Y'_m) \mu(X'_\ell, f^{-1}(Y'_m); A) .$$

Appelons x'_r les composantes de $f(X) \cap V'$, qui sont les images des X'_ℓ (nous écrirons $\ell \rightarrow r$ pour signifier que $f(X'_\ell) = x'_r$). Toujours en appliquant II.9, nous avons

$$\mu(f(X), Y; R) = \sum_{r, m} \mu(f(X), V'; x'_r) \mu(Y, V'; Y'_m) \mu(x'_r, Y'_m; B) ,$$

et nous rappelons que nous voulons démontrer

$$\mu(X, f^{-1}(Y), Q) = \mu(f(X), Y; R) \nu(X, f) .$$

Il suffirait pour cela que nous disposions des formules

$$(2) \quad \sum_{\ell \rightarrow r} \mu(X, W'; X'_\ell) \nu(X'_\ell, f) = \mu(f(X), V'; f(X'_\ell)) \nu(X, f) ,$$

$$(3) \quad \mu(X'_\ell, f^{-1}(Y'_m); A) = \mu(f(X'_\ell), Y'_m; B) \nu(X'_\ell, f) .$$

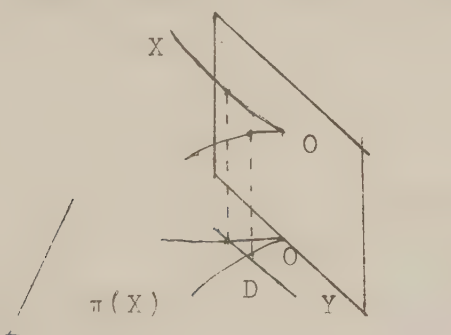
Or, les formules (2) apparaissent comme des formules de projection, où Y serait un plan de dimension finie, et les formules (3) sont des formules de projection où V est de dimension finie, et où $f(X) \cap Y$ est réduit à un point. Dans ce dernier cas, en remplaçant la situation $(X \subset W, f, V \supset Y)$ par la situation $(X \times Y \subset W \times V, f \times \text{id}_V, V \times V \supset \Delta)$, où Δ est la diagonale de $V \times V$, on se ramène au cas (4) où Y est un plan ne rencontrant $f(X)$ qu'en un point. De même, dans le cas (2), en rajoutant à la figure un plan Z contenu dans Y et "transverse" à $f(X)$, on se ramène, utilisant la propriété de transitivité II.4, au cas (4) que nous allons enfin traiter.

Lemme 8. Soient E un espace de Banach, π la projection de $\mathbb{C}^q \times E = F$ sur E , X un germe à l'origine de sous-ensemble

analytique irréductible de F , tel que la projection $\pi|_X$ soit finie, Y un plan de E , passant par l'origine, de dimension égale à la codimension de $\pi(X)$, et tel que O soit isolé dans $\pi(X) \cap Y$. Alors, on a l'égalité

$$\mu(X, \pi^{-1}(Y); O) = \mu(\pi(X), Y; O) \nu(X, \pi) .$$

Démonstration : Les multiplicités d'intersection qui interviennent dans cette formule peuvent être interprétées grâce à la propriété



II.3. On voit facilement qu'il existe une parallèle D à Y coupant $\pi(X)$ transversalement en $\mu(\pi(X), Y; O)$ points, soient A_i , et telle de plus que toutes les fibres $\pi^{-1}(A_i)$ coupent X transversalement en $\nu(X, \pi)$ points.

Une multiplication donne alors le nombre d'intersections (qui sont transverses) de X et $\pi^{-1}(D)$.

Remarque. Au cours de cette démonstration, nous avons rencontré une situation de projection (2) que nous ne nous étions pas proposés d'étudier. Nous allons la décrire dans une forme plus générale, sans toutefois donner de formule, pour ne pas ennuyer le lecteur.

Soient V, W deux variétés analytiques banachiques, f une application analytique épidermique de V dans W , X un sous-ensemble analytique irréductible de codimension n de V , Y un sous-ensemble analytique irréductible de W , de dimension $p \geq n$. Alors, la contre-image $f^{-1}(Y)$ est un sous-ensemble analytique de dimension finie de V . Si nous supposons $f|_X$ propre, $f(X)$ est analytique (de codimension finie) dans W , et $f(X \cap f^{-1}(Y))$ est analytique de dimension finie dans W . On peut, avec des hypothèses sur les dimensions et des multiplicités, comparer $f(X) \cap Y$ et $f(X \cap f^{-1}(Y))$.

Une autre situation intéressante est celle où X est un sous-ensemble analytique de dimension finie de V , l'application f n'étant plus nécessairement épidermique, mais étant toujours de restriction à X propre ; nous prenons dans ce cas Y de codimension finie dans W . Si l'on sait que $f(X)$ est analytique de dimension finie dans W , on a encore envie de comparer $f(X) \cap Y$ et $f(X \cap f^{-1}(Y))$. Mais l'analyticité de $f(X)$ ne semble pas évidente en général. Le but de la deuxième partie de ce chapitre est de la démontrer dans le cas où W est une variété hilbertienne.

BIBLIOGRAPHIE

Celle du chapitre I.

- [13] ABRAHAM-ROBBIN : Transversal mappings and flows. Benjamin 1967.

Définition : Soit W une variété analytique banachique. Nous dirons qu'un sous-ensemble analytique A de W est de dimension finie si, localement dans W , A est un sous-ensemble analytique d'une sous-variété analytique de dimension finie de $W^{(1)}$.

Nous voulons démontrer le :

Théorème 1 :

assertion 1 : Soit f une application analytique propre d'une surface de Riemann V dans une variété analytique banachique W . Alors, $f(V)$ est un sous-ensemble analytique de dimension finie de W .

assertion 2 (resp. 3) : Soit f une application analytique finie (i.e. fermée et telle que la contre-image de tout point soit finie) (resp. propre) d'un espace analytique V de dimension localement finie dans une variété analytique hilbertienne W . Alors, $f_1(V)$ est un sous-ensemble analytique de dimension finie de W .

Les sous-ensembles analytiques de dimension finie d'une variété analytique banachique peuvent aussi bien être définis comme étant localement la contre-image d'un point par une application analytique épidermique à valeurs dans un quelconque espace de Banach ; ce qui nous renseigne sur le comportement de tels sous-ensembles par images réciproques par des applications épidermiques. L'assertion 2 donne une réponse partielle sur leur comportement par images directes.

(1) Cette définition paraît plus restrictive que celle donnée par Douady ([1] page 28). Elle est cependant équivalente, comme nous le montrons dans l'appendice 2.

Nous allons d'abord démontrer la proposition :

Proposition 2 : Soit f un germe d'application analytique de $\mathbb{C}$ (resp. d'un espace analytique X de dimension finie) dans un espace de Banach E (resp. dans un espace de Hilbert E), tel que 0 soit isolé dans $f^{-1}f(0)$. Alors, l'image de f est contenue dans un germe de sous-variété analytique de dimension finie de E .

L'hypothèse de propreté (0 isolé dans $f^{-1}f(0)$) est bien sûr inutile lorsque f est fonction d'une seule variable (pour $f=0$, la conclusion est encore vraie!). Montrons sur un exemple qu'elle est nécessaire lorsque f est une fonction de plusieurs variables : l'image du germe f d'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\ell^2(\mathbb{C})$ qui, au couple (x,y) , associe la suite $(x, xy, xy^2, \dots)$ n'est contenue dans aucune hypersurface analytique régulière de l'espace-but. En effet, toute fonction ϕ analytique scalaire sur $\ell^2(\mathbb{C})$ qui s'annule sur l'image de ϕ a nécessairement une dérivée à l'origine nulle, ce que l'on voit en considérant les coefficients des termes en xy^i du développement en 0 de $\phi \circ f$.

Indiquons toutefois une traduction d'un résultat de Douady ([1] page 63) : si f est n'importe quel germe d'application analytique d'un espace analytique de dimension finie X dans un espace de Banach E , il existe un sous-espace vectoriel fermé F de E , de codimension finie, tel que $f(X)$ ne coupe F qu'en 0 . Ce résultat permet (mais ce n'est pas nécessaire) de se ramener pour la démonstration de la proposition 2 au cas où X est lisse. En effet, on en déduit le

Lemme 3 : Soient $X \subset \mathbb{C}^n$ un germe d'ensemble analytique, f un germe d'application analytique propre de X dans un espace de Banach de dimension infinie E . Alors, il existe un prolongement g de f en un germe d'application analytique propre de $\mathbb{C}^n$ dans E .

Démonstration : Soit ϕ un prolongement quelconque de f à $\mathbb{C}^n$;

il existe un sous-espace F de E de dimension infinie tel que $\phi(\mathbb{C}^n) \cap F = 0$. D'autre part X peut être défini dans $\mathbb{C}^n$ par un nombre fini d'équations scalaires, donc par une application analytique ψ de $\mathbb{C}^n$ dans F . On peut prendre $g = \phi + \psi$.

La première étape de la démonstration de la proposition 2, et c'est d'elle seule que proviennent les restrictions de l'énoncé, consiste en la construction d'une suite λ_i de formes linéaires continues sur E , d'une suite e_i de vecteurs unitaires de E , et d'un voisinage K de 0 dans X tels que :

- 1°) pour tout couple (i, j) , $\lambda_i(e_j)$ soit égal à δ_{ij} ;
- 2°) pour tout point z de K , $f(z)$ soit somme de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(f(z)) e_i$;
- 3°) la série $\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{z \in K} |\lambda_i(f(z))|$ soit convergente

Il suffit évidemment d'étudier le cas où X est lisse (d'ailleurs, l'hypothèse de propreté n'intervient pas ici).

CAS "une variable" : Considérons la suite croissante E_i des sous-espaces de dimension finie de E engendrés par les j premiers vecteurs dérivées de f ; les espaces E_i sont indexés par leur dimension. Nous prenons pour e_1 n'importe quel vecteur unitaire de E_1 ; supposant que nous ayons choisi $e_1, \dots, e_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, nous allons donner un choix possible de e_{n+1} et λ_n . Soit μ_n une forme linéaire sur E , de norme 1, prenant la valeur 1 sur le vecteur e_n . Appelons λ_n la forme linéaire de noyau $E_{n-1} \oplus (\ker \lambda_1 \cap \dots \cap \ker \lambda_{n-1} \cap \ker \mu_n)$ prenant la valeur 1 sur e_n . Prenons pour e_{n+1} un quelconque vecteur unitaire de $\ker \lambda_1 \cap \dots \cap \ker \lambda_n \cap E_{n+1}$. La condition 1° est facile à vérifier. Pour vérifier 3°, il nous faut d'abord remarquer que, si X appartient à E_n , $\sum_{j=1}^n |\lambda_j(X)| \leq 2^n \|X\|$. Appliquant en effet μ_p à l'égalité définissant $\lambda_p(X)$, nous trouvons

$$\mu_p(X) = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j(X) \mu_p(e_j) + \lambda_p(X) ;$$

d'où

$$|\lambda_p(X)| \leq \|X\| + \sum_{j=1}^{p-1} |\lambda_j(X)| ;$$

d'où

$$|\lambda_p(X)| \leq 2^{p-1} \|X\| \dots,$$

et le résultat en vue. Soit maintenant $\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j z^j$ le développement à l'origine du germe f ; il est absolument uniformément convergent dans un disque de rayon R . D'autre part, il est certain que θ_j appartient à E_j . Donc,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{|z| \leq \rho} |\lambda_i(f(z))| \leq \sum_{i,j} |\lambda_i(\theta_j)| \rho^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \|\theta_j\| \rho^j$$

La condition 3° est donc vérifiée si nous prenons pour K le disque de rayon $R/2$. La validité de 2° provient d'une simple interversion de sommations.

CAS "plusieurs variables" : On ordonne les vecteurs dérivées de f de façon compatible avec le poids de la dérivation, et on définit les espaces E_i comme précédemment. L'espace E étant hilbertien, on prend pour e_i une base orthonormale adaptée au drapeau E_i , et pour λ_i la "projection" orthogonale d'image Ce_i . Si f est une fonction de n variables, le vecteur dérivée $\theta_{j_1 \dots j_n}$ appartient sûrement à $E_{|j|}$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(\theta_{j_1 \dots j_n})| \leq |j|^n \|\theta_{j_1 \dots j_n}\|$$

Le même calcul que précédemment montre que, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un point où la série de Taylor de f converge absolument, on peut prendre pour K un polydisque de rayon ρ strictement inférieur à $\min |\alpha_i|$.

Cette étape franchie, notons toujours E_i le sous-espace de dimension i de E engendré par $e_1, \dots, e_i$; appelons F_i

l'intersection des noyaux de $\lambda_1, \dots, \lambda_i$, qui est un supplémentaire de E_i ; soit enfin $f_i(z)$ la fonction $\lambda_i(f(z))$ et $\phi_i(z)$ l'application de X dans E_i de coordonnées $f_1(z), \dots, f_i(z)$. A partir d'un certain rang I , le morphisme ϕ_i est fini: en effet, la suite des germes $\phi_i^{-1}(0) = f^{-1}(F_i)$ de sous-espaces de X est décroissante et sa pour intersection 0 (bien que $\cap F_i$ ne soit pas nécessairement réduit à 0). Le théorème de préparation [5] nous enseigne alors que ϕ_I^* fait de σ_X (anneau des germes de fonctions analytiques sur X) un σ_{E_I} -module de type fini. Pour j plus grand que I , la suite des $\phi_j^* \sigma_{E_j}$, qui est une suite croissante de sous- σ_{E_I} -modules de σ_X , stationne donc à partir d'un certain rang, soit J . Appelons $a_h(f_1(z), \dots, f_J(z))$, pour h compris entre 1 et H , un système de générateurs de $\phi_J^* \sigma_{E_J}$ sur l'anneau σ_{E_I} . Ce qui précède montre que, pour n plus grand que J , on peut écrire

$$f_n(z) = \sum_{h=1}^H \alpha_n^h(f_1(z), \dots, f_I(z)) a_h(f_1(z), \dots, f_J(z)),$$

où les $\alpha_n^h(y_1, \dots, y_I)$ sont des germes de fonctions holomorphes sur E_I .

Nous voyons ainsi que, si nous savons bien choisir les coefficients α_n^h , nous pourrions enfermer l'image de f dans le graphe d'une application analytique de E_J dans F_J . Renvoyons à l'appendice pour un traitement spécial du cas "une variable". Pour le cas général, faisons d'abord quelques commentaires sur la topologie "canonique" de Jurchescu [6], dans le cas particulier du corps des complexes⁽¹⁾.

Sur l'algèbre $\mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$, Jurchescu définit la "norme" $\|\cdot\|_\alpha$ associée au poly-réel $\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\|\sigma\|_\alpha = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} |\sigma_m| \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n}$$

(1) Je remercie M. Henri Cartan d'avoir attiré mon attention sur cet article. Ma première démonstration, plus lourde, utilisait un théorème de noethérianité de Frisch [2].

Si nous appelons Λ_α l'ensemble des séries formelles σ telles que $\|\sigma\|_\alpha$ soit fini, Λ_α , muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha$, est un espace de Banach. La limite inductive des Λ_α (pour l'ordre naturel sur les α , et vu les applications naturelles entre les Λ_α) dans la catégorie des EVTLC a pour espace vectoriel sous-jacent $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$. Une autre solution pour topologiser $\mathcal{O}_n$ est de le considérer comme limite inductive des espaces de Banach $B(K)$, où K est un polydisque centré à l'origine de $\mathbb{C}^n$. La formule de Cauchy permet de démontrer que les deux topologies ainsi obtenues sur $\mathcal{O}_n$ coïncident. Si maintenant nous voulons topologiser $\mathcal{O}_X$, où X est un germe d'espace analytique, nous plongerons X dans un $\mathbb{C}^n$, il s'ensuivra une surjection de $\mathcal{O}_n$ sur $\mathcal{O}_X$, et nous munirons ce dernier de la topologie quotient de $\mathcal{O}_n$ (le résultat étant indépendant du plongement choisi). Le corollaire V.B.4 de [4] montre que cette topologie sur $\mathcal{O}_X$ est aussi la topologie limite inductive des $B(K)$ suivant les voisinages compacts K de 0 dans X .

Dans la situation qui nous occupe, $\mathcal{O}_X$ admet une topologie propre, et aussi une topologie comme $\mathbb{C}_{E_I}$ -module de type fini, laquelle est a priori plus fine que la première. D'après le théorème du graphe fermé pour les limites inductives (non nécessairement strictes) d'espaces de Banach [8], ces deux topologies coïncident. Il s'ensuit que, sur $\phi_J^*(\mathcal{O}_{E_J})$, la topologie de $\mathbb{C}_{E_I}$ -module et la topologie induite par $\mathcal{O}_X$ coïncident. D'après le théorème 3.1 de [6], l'épimorphisme α de $(\mathcal{O}_{E_I})^H$ sur $\phi_J^*(\mathcal{O}_{E_J})$, résultant du choix d'un système de générateurs, admet une section s , de coordonnées s_n , continue. Les germes f_n ($n > J$) étant définis sur un même voisinage compact K de 0 dans X , les germes $s_n(f_n)$ seront définis sur un même polydisque Δ' de E_I . Soit Δ un polydisque de E_J , où les germes a_n soient définis, et dont la trace sur E_I soit contenue dans Δ' . Considérons la fonction scalaire

$$g_n(y_1, \dots, y_J) = \sum_{h=1}^H s_n(f_n)(y_1, \dots, y_I) a_n(y_1, \dots, y_J) .$$

Nous avons

$$\sup_{y \in \Delta} |g_n(y)| \leq C \sup_{x \in K} |f_n(x)| ,$$

où la constante C ne dépend pas de n . Il s'ensuit que la série

$$G(y) = \sum_{n=J+1}^{\infty} g_n(y) e_n$$

converge absolument uniformément sur Δ (cf. condition 3° de la première étape) et définit un germe d'application analytique de E_J dans F_J dont le graphe contient l'image du germe f (cf. condition 2°).

De la proposition 2, nous allons déduire facilement les assertions 1 et 2. Pour l'assertion 1, soit y un point de $f(V)$. Sa contre-image est la réunion d'un nombre fini de composantes connexes compactes de V et d'un ensemble fini $(X_i)_{i=1, \dots, q}$. La propriété de f entraîne que les points assez voisins de y , s'ils sont dans l'image de f , ne peuvent provenir que de points voisins des X_i . Montrons par récurrence que la réunion des images de petits voisinages V_i de X_i est contenue dans une sous-variété de dimension finie de W : soit w une sous-variété contenant $f(V_1) \cup \dots \cup f(V_p)$. Par un automorphisme local de W , nous pouvons supposer que w est un plan; soit π la projection parallèle à ce plan. L'application $\pi \circ f$ de V_{p+1} dans " W/w " a son image contenue dans une sous-variété v dont la contre-image par π est une sous-variété de W contenant $f(V_1) \cup \dots \cup f(V_{p+1})$.

Un tel raisonnement n'est plus valable pour l'assertion 2, car l'application $\pi \circ f$ pourrait alors n'être ni nulle, ni propre. Il nous faut montrer que la réunion de deux sous-variétés de dimension finie passant par l'origine d'un espace de Hilbert E est contenue (localement) dans une sous-variété de dimension finie de E . Soit $v: \mathbb{C}^n \rightarrow E$ et $w: \mathbb{C}^p \rightarrow E$ des cartes des deux sous-variétés. Dans $\mathbb{C}^{n+p}$, considérons le sous-ensemble analytique $\Gamma = \mathbb{C}^n \times 0 \cup 0 \times \mathbb{C}^p$. La juxtaposition de v et w donne une application

ϕ de Γ dans E ; ϕ est analytique (induite par exemple par $v(x) + w(y)$) et propre. D'après la proposition 2, l'image de ϕ est enfermable dans une sous-variété de dimension finie (bien que ce ne soit pas forcément le cas de l'image de l'application $v(x) + w(y)$).

Indiquons une autre conséquence de la proposition 2, qui répond à une question de M. Remmert :

Proposition 4 : Soit f une application analytique d'un ouvert V d'un espace de Banach dans un espace de Hilbert W , transformant l'origine en l'origine. Supposons que les fibres de f soient purement codimensionnelles de même codimension n . Alors, il existe un voisinage de l'origine dans V dont l'image par f soit analytique de dimension finie (précisément n) dans un voisinage de l'origine de W .

Démonstration : Ramenons-nous au cas où la dimension de V est finie, qui est quasiment traité dans [7]. Soit S un plan de V , de dimension n , ne rencontrant $f^{-1}(0)$ qu'en 0 (on restreint éventuellement V). L'application $f|_S$ étant à fibres discrètes, le germe d'ensemble $f(S)$ est analytique de dimension finie n . Nous allons montrer que $f^{-1}f(S)$ est le germe de V tout entier : c'est un germe analytique et, s'il n'était pas V entier, il existerait une droite T ne le rencontrant qu'à l'origine. Or, considérons l'application f restreinte à $S \oplus T$. Ses fibres sont à priori de codimension au plus égale à n en tout point, mais, étant donné un point x de $S \oplus T$ assez voisin de 0 , le parallèle à S mené par x rencontre $f^{-1}(0)$ suivant un ensemble fini non vide, donc toute autre fibre de f suivant un ensemble fini, et $f^{-1}f(x)$ est de codimension en x au moins égale à n . Appliquons le résultat classique à $f|_{S \oplus T}$: $f^{-1}f(S)$ contient $S \oplus T$, ce qui est contraire au choix de T .

On peut remarquer que l'hypothèse faite dans la proposition 4 entraîne que le rang de f est borné par n , cette borne étant atteinte. Mais une hypothèse de rang borné sur f ne suffit pas pour

conclure.

L'outil essentiel pour la démonstration de l'assertion 3 est le théorème suivant sur les revêtements :

Proposition 5 : Soit $E' \times E''$ un bidisque d'un espace de Hilbert, où E' est de dimension finie n ; appelons π la projection canonique de E sur E' . Soit X un fermé de E , localement compact, tel que $\pi|_X$ soit une application finie de X sur E' . Supposons qu'il existe un sous-ensemble négligeable A de E' tel que π soit un revêtement de $X - \pi^{-1}(A)$ sur $E' - A$. Supposons en outre que $X - \pi^{-1}(A)$ soit une sous-variété analytique de $E - \pi^{-1}(A)$ et soit dense dans X . Alors, X est un sous-ensemble analytique de E de dimension finie (précisément n).

Démonstration : D'après un théorème de Grauert et Remmert [3], X peut être muni d'une structure $\tilde{X}$ d'espace analytique de dimension n , dont la topologie sous-jacente soit celle initialement donnée sur X , et qui prolonge la structure analytique donnée sur $X - \pi^{-1}(A)$. Les fonctions holomorphes sur $\tilde{X}$ sont les fonctions continues dont la restriction à $X - \pi^{-1}(A)$ est holomorphe. D'après un lemme de Bungart [0], l'injection canonique de $\tilde{X}$ dans E est donc une application analytique, et son image est de dimension finie d'après l'assertion 2.

Remarque : Si $n=1$, et si A est "mince", la conclusion vaut si E est un bidisque d'un quelconque espace de Banach : A est nécessairement un point, l'origine par exemple. Considérons séparément les composants connexes (E' ayant été suffisamment rapetissé ; elles sont en nombre fini) de $X - \pi^{-1}(0)$: soit Ω l'une d'elles, et k le degré du revêtement $\Omega \xrightarrow{\pi} E' - 0$. Il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}$ et une fonction continue f de $U - 0$ dans X telle que $\pi \circ f(z) = z^k$. Cette fonction est nécessairement holomorphe et bornée : elle se prolonge en une fonction holomorphe sur U dont l'image est X (au moins en tant que germe). L'assertion 1 donne alors le résultat.

Pour démontrer maintenant l'assertion 3, il suffit⁽¹⁾ de recopier la démonstration des pages 163-165 de [4]. Il nous faut toutefois étendre le résultat (b) : soit X un espace analytique de dimension pure n , et de dimension holomorphe k . Soient F une application propre de X dans un espace de Banach E , et V la fibre $F^{-1}(0)$. Nous voulons montrer qu'il existe une application linéaire λ de E dans $\mathbb{C}^k$ telle que V soit égal à $(\lambda \circ F)^{-1}(0)$ (au moins dans un certain voisinage de V). Pour tout point x de V , il existe un voisinage U_x de x et un sous-espace E_x de codimension finie de E tels que $V \cap U_x = F^{-1}(E_x) \cap U_x$. La fibre V étant compacte, nous la recouvrons par un nombre fini de U_x et trouvons ainsi un voisinage Ω de V et un sous-espace P de codimension finie de E tel que $V \cap \Omega = F^{-1}(P) \cap \Omega$. En considérant la composée de F et d'une application linéaire de E dans un $\mathbb{C}^t$, de noyau P , composée qui est propre au moins si on la restreint à un voisinage convenable de V , nous nous ramenons pour notre problème au cas traité dans [4].

Appendice 1: Majorations de la proposition 2 dans le cas d'une variable.

Lorsque $X = \mathbb{C}$, on peut toujours prendre (sauf si f est nul), I égal à 1. Les σ_{E_1} -modules σ_X et $\phi_J^* \sigma_{E_J}$ sont alors libres.

Choisissons un système de générateurs a_h indépendants. Nous allons voir que les majorations désirées sont automatiquement réalisées. Par un changement de variable à la source, nous pouvons toujours supposer que $f_1(z)$ vaut z^k . Alors, H est inférieur ou égal à k . Soit ρ une racine $k^{\text{ième}}$ primitive de l'unité. Désignons par $A_h(z)$ le germe $a_h(z^k, f_2(z), \dots, f_J(z))$, et plaçons-nous une fois pour toutes dans un disque de $\mathbb{C}$ où toutes les fonctions $f_n(z)$ et $A_h(z)$ soient définies. Nous cherchons à résoudre le système d'équations

$$(1) \quad f_n(\rho^l z) = \sum_{h=1}^H \beta_h(z) A_h(\rho^l z) \quad 1 \leq l \leq k$$

(1) Il vaut mieux encore suivre la démarche du chapitre 7 de [7].

Ce système admet, quel que soit le paramètre z , une solution (puisque les A_h engendrent $\phi_J^* \sigma_{E_J}$ sur σ_{E_1}). Montrons que, pour z non nul, cette solution est unique. Aucun coefficient de la matrice $[A_h(\rho^\ell z)]$ n'est nul pour z différent de 0 assez petit. Supposons pour fixer les idées que le déterminant formé par les m premières lignes et colonnes soit non nul au voisinage de 0, et que tous les déterminants d'ordre supérieur soient nuls. Il existerait un unique système de coefficients, fonctions méromorphes de z , tel que

$$A_{m+1}(\rho^\ell z) = \sum_{h=1}^m c_h(z) A_h(\rho^\ell z) \quad 1 \leq \ell \leq m$$

Les mêmes égalités, avec les mêmes coefficients, auraient nécessairement lieu pour $m+1 \leq \ell \leq k$. Les fonctions c_h seraient donc en réalité des fonctions de z^k , et, en multipliant l'une des égalités par une puissance convenable de z^k , nous aurions une relation entre les $A_h(z)$ à coefficients dans $\phi_1^* \sigma_{E_1}$, ce qui est contraire à

l'hypothèse d'indépendance des A_h . Le système (1) admet donc une solution unique pour tout z non nul (assez petit). Les coefficients $\beta_h(z)$ sont à priori les fonctions méromorphes de z , mais à posteriori des fonctions holomorphes de z^k prolongeant les germes $\alpha_h(z^k)$ (puisque f_n est engendré comme germe par les A_h). Les formules de Cramer nous disent que $\beta_h(z)$ s'exprime comme quotient d'un polynôme en $f_n(\rho^\ell z)$ et $A_h(\rho^\ell z)$ par un polynôme en les $A_h(\rho^\ell z)$ ne s'annulant (au plus) qu'à l'origine. Ceci donne une majoration de $f_n(z)$ sur un cercle centré à l'origine, ce qui, avec le principe du maximum, permet de conclure.

Appendice 2 : Equivalence de deux définitions des sous-ensembles analytiques de dimension finie d'une variété banachique.

Soit E un espace de Banach, et X un germe à l'origine de sous-ensemble analytique de dimension finie au sens de Douady,

c'est-à-dire muni d'un modèle $M \xrightarrow{\phi}$, où M est un germe de sous-ensemble analytique à l'origine d'un $\mathbb{C}^n$. Réalisons M dans son espace tangent de Zariski : soit $\xrightarrow{i} T$ cette réalisation. Puis, prolongeons ϕ de façon arbitraire en une application analytique ψ de T dans E . Puisque M est un modèle, l'application

$$\phi^* : \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_M$$

est surjective. L'application

$$\phi_* : \text{Der } \mathcal{O}_M \longrightarrow \text{Der } \mathcal{O}_E$$

est donc injective, et, l'application i_* définie de même étant bijective,

$$\psi_* : \text{Der } \mathcal{O}_T \longrightarrow \text{Der } \mathcal{O}_E$$

est encore une injection. Or, ψ_* n'est autre que $\psi^0(0)$; $\psi(T)$ est donc un germe de sous-variété de dimension finie de E , qui contient X .

BIBLIOGRAPHIE

- [0] BUNGART : Holomorphic functions ... ; Trans. Amer. Math. Soc. vol.111, 1964 ; page 329.
- [1] DOUADY : Le problème des modules ... ; Annales de l'Institut Fourier XVI, 1966 ; page 1.
- [2] FRISCH : Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes ; Inventiones mathematicae, vol. 4, 1967 ; page 118.
- [3] GRAUERT-REMMERT : Komplexe Räume ; Math. Annalen, Bd.136, 1958 ; page 298.
- [4] GUNNING-ROSSI : Analytic functions of several complex variables ; Prentice Hall.
- [5] HOUZEL : Géométrie analytique locale, II : théorie des morphismes finis ; séminaire Henri Cartan 1960-61, exposé 19, page 19.
- [6] JURCHESCU : On the canonical topology of an analytic algebra and of an analytic module ; Bull. Soc. Math. France, t.93, 1965, page 129.
- [7] NARASIMHAN : Introduction to the theory of analytic spaces ; Springer-Verlag ; page 131.
- [8] TREVES : Topological vector spaces, distributions and kernels ; Academic Press, page 549.

Exposé n° 20 : DESCRIPTION DE L'ANNEAU DE COHOMOLOGIE DE L'ENSEMBLE
(chapitre IV) DES OPERATEURS A INDICE D'UN ESPACE DE HILBERT COMPLEXE,
par Gabriel RUGET.

On sait [4] [7] que l'ensemble des opérateurs à indice d'un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, muni de la topologie de la norme, est un classifiant pour le groupe unitaire infini. Nous reprenons toutefois à zéro l'étude de l'anneau de cohomologie entière de cet espace, dans le but d'en obtenir une interprétation plus concrète.

Soient E un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, et Ω_i l'ensemble des opérateurs d'indice i de E (Ω_i est un ouvert connexe de $L(E)$) (*). Nous noterons Ω_i^n (resp. V_i^n) l'ensemble des opérateurs d'indice i dont le noyau a une dimension au plus égale à n (resp. une dimension égale à n). Le complémentaire dans Ω_i de Ω_i^n (qui est ouvert) est $\overline{V}_i^{n+1}$. Les Ω_i^n constituent une filtration croissante de Ω_i , que nous allons utiliser pour déterminer la structure additive de la cohomologie entière de cet espace (nous nous limiterons en fait à l'étude de Ω_0 , puisque tous les Ω_i ont le même type d'homotopie).

Lemme 1 : V_i^n est une sous-variété analytique complexe de Ω_i , de codimension $n(n-i)$; son adhérence $\overline{V}_i^n$ est un joli sous-ensemble analytique de Ω_i .

Démonstration : Soit f un élément de V_i^n . Choisissons une décomposition directe $\text{Ker } f \oplus A$ de l'espace-source de f , et une décomposition $B \oplus \text{Im } f$ de son espace-but, de façon

(*) Nous appelons indice d'un opérateur f la dimension du noyau de f diminuée de la codimension de l'image de f .

à représenter f par une matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, où δ est inversible. Les opérateurs voisins de f s'écrivent dans les mêmes décompositions $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où d est inversible, et où a est une matrice à n colonnes et $n-i$ lignes. Les opérateurs g appartenant à V_i^n sont ceux qui satisfont l'équation analytique

$$a - bd^{-1}c = 0,$$

dont l'équation linéaire tangente au point f est $a=0$. Quant aux opérateurs g voisins de f et situés dans $\bar{V}_i^p$ (pour $n \geq p \geq i$), ce sont ceux qui satisfont les équations analytiques

$$\text{rang}(a - bd^{-1}c) \leq n-p.$$

Cohomologie de la variété V_i^n : Appelons $\mathcal{G}_p$ la Grassmannienne des p -plans complexes de E ; c'est une variété analytique banachique, dont l'anneau de cohomologie entière est un anneau de polynômes en des variables $c_1, \dots, c_p$ de poids respectifs $2, \dots, 2p$; le rang de $H^{2S}(\mathcal{G}_p)$ est donc égal au nombre $\pi_p(S)$ de partitions (non ordonnées) de S en entiers inférieurs ou égaux à p (ce qui est aussi égal au nombre de partitions non ordonnées de S en p entiers ou moins). La variété V_i^n est fibrée sur $\mathcal{G}_n \times \mathcal{G}_{n-i}$ par l'application qui, à un opérateur, associe son noyau, et l'orthogonal de son image. La fibre-type de cette fibration est l'espace des automorphismes d'un espace de Hilbert : elle est contractile [6], et l'anneau de cohomologie de V_i^n est égal à celui de $\mathcal{G}_n \times \mathcal{G}_{n-i}$, c'est-à-dire, d'après le théorème de Künneth, à un anneau de polynômes en des variables $c_1, \dots, c_n, c'_1, \dots, c'_{n-i}$ de poids respectifs $2, \dots, 2n, 2, \dots, 2(n-i)$. En particulier, le rang de $H^{2S}(V^n)$ est

$$\sum_{0 \leq q \leq S} \pi_n(q) \pi_n(S-q).$$

Proposition 2. La cohomologie entière de Ω_0 est nulle en degrés impairs. Le groupe $H^{2S}(\Omega_0; \mathbb{Z})$ est libre de rang $\pi(S) = \pi_\infty(S)$. Il en va de même pour les groupes d'homologie entière, dont les groupes de cohomologie sont exactement les duals.

La dernière assertion découle évidemment des premières et de la formule des coefficients universels. Le fermé V^n de Ω (nous omettons désormais l'indice 0) étant de codimension topologique $2n^2$, le groupe $H^p(\Omega^q)$ est constant pour $q \geq \sqrt{p/2}$, et égal à $H^p(\Omega)$. Ecrivant, dans l'ouvert Ω^q , la suite exacte de cohomologie à supports dans V^q , utilisant l'isomorphisme "de Gysin" et le résultat qui précède sur la cohomologie de V^q , nous trouvons, par récurrence sur n , que la cohomologie de Ω^n est nulle en degrés impairs, et que le groupe $H^{2S}(\Omega^n)$ est libre de rang

$$\sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq S-p^2}} \pi_p(q) \pi_p(S-p^2-q).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier l'égalité

$$\pi_\infty(S) = \sum_{0 \leq p, q} \pi_p(q) \pi_p(S-p^2-q)$$

Le premier membre est le nombre des fonctions d'entiers, à valeurs entières, décroissantes au sens large, dont la somme

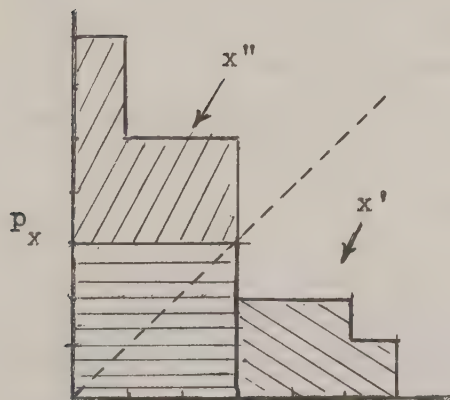


figure 1

des valeurs soit S . Nous associons à une telle fonction x la partie D_x de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ située "au-dessous de son graphe" (pour préciser ceci, indiquons que la zone hachurée sur le dessin correspond à la fonction de valeurs successives 7, 5, 5, 2, 2, 1, 0...), dont la surface est S . Soit p_x le côté du plus grand carré s'appuyant sur les axes de coordonnées

et contenu dans D_x . Otant ce carré, on disconnecte D_x en deux régions de surface q et $S-p_x^2-q$ qui permettent de définir deux fonctions d'entiers à valeurs entières inférieures ou égales à p_x , décroissantes au sens large, et d'intégrale q et $S-p_x^2-q$ respectivement (pour le dessin, $p_x=3$ et ces fonctions sont $2, 2, 1, 0, \dots$ et $3, 3, 1, 1, 0, \dots$) ; soient x' et x'' ces deux fonctions. La construction que nous venons de décrire étant réversible, l'égalité est démontrée.

N.B. Rappelons que $\pi_0(n)$ est nul pour $n>0$, et que $\pi_p(0)$ vaut 1 pour tout $p \geq 0$.

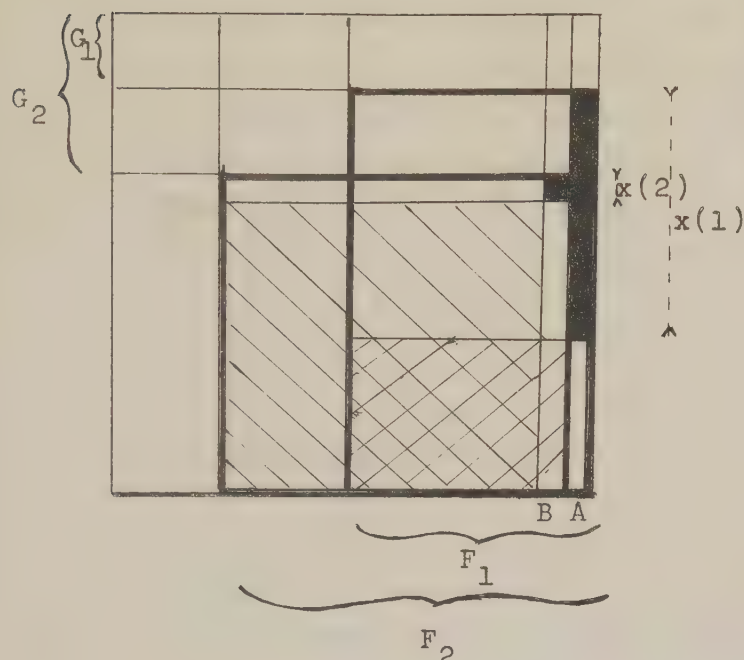
Nous appellerons désormais X l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ décroissantes (au sens large), asymptotiquement nulles. Il est muni de l'involution qui, à la fonction x , associe la fonction $\hat{x}$ telle que les ensembles de points situés au-dessous des graphes de x et $\hat{x}$ (dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$) soient symétriques par rapport à la diagonale. Nous désignerons une fonction de X par la suite des valeurs non nulles qu'elle prend, entre parenthèses. Ainsi, $(n)^\wedge = (1, 1, \dots, 1)$ (n fois 1), symbole que nous écrirons sous la forme abrégée $(\underline{n})$. Nous noterons $I(x)$ la somme des valeurs prises par la fonction x , $L(x)$ le cardinal du support de x .

Prenons une fonction $x \in X$, et, dans l'espace E , deux suites de sous-espaces fermés $F_1 \subset \dots \subset F_{L(x)}$, $G_1 \subset \dots \subset G_{L(x)}$, avec $\dim G_i = g_i$, $i - x(i) \leq g_i < \infty$, $\text{codim } F_i = x(i) - i + g_i$. Soit $K(F_i, G_i)$ le sous-ensemble de Ω formé des opérateurs f tels que, pour tout i , on ait

$$\dim (f^{-1}(G_i) \cap F_i) \geq i$$

Proposition 3. $K(F_i, G_i)$ est un joli sous-ensemble analytique complexe de Ω , de codimension $I(x)$. La classe de cohomologie entière, de degré $2I(x)$, représentée par $K(F_i, G_i)$ ne dépend que de la fonction x . Nous la noterons $[x]$.

Démonstration : Pour la première assertion, le seul problème est



de calculer la codimension de $K(F_i, G_i)$, qui est une réunion localement finie de sous-variétés analytiques. Nous allons étudier, sur le dessin ci-contre, ce qui se passe (dans le cas $L(x)=2$) au voisinage d'un opérateur $f \in K(F_i, G_i)$ situé dans une nappe de codimension minimum, c'est-à-dire tel que la dimension de $f^{-1}(G_1) \cap F_1$ soit 1 (choisissons un vecteur non nul A de cet espace) et que la dimension de $f^{-1}(G_2) \cap F_2$ soit 2 (choisissons un vecteur B qui, joint à A , engendre cet espace ; sur le

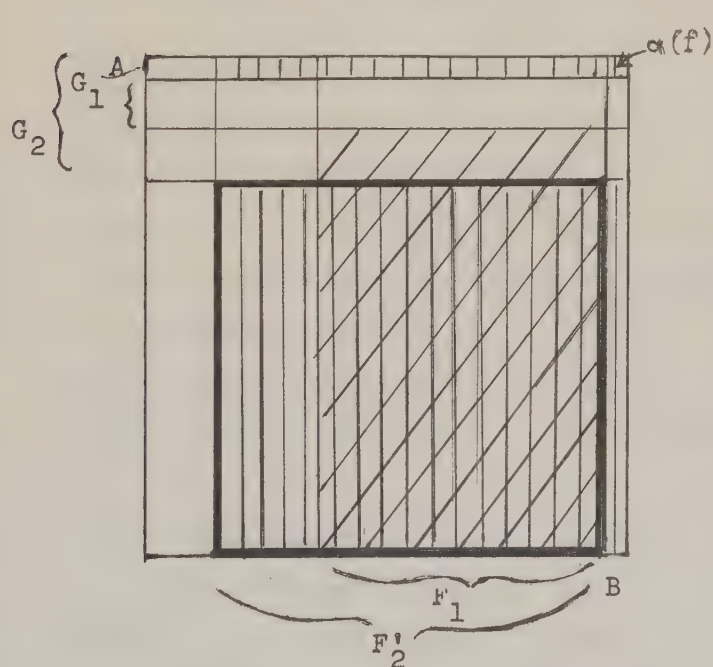
dessin, B semble encore être contenu dans F_1 , mais ceci n'intervient pas en fait dans le calcul). Représentons f par une matrice : la colonne donnant l'image de A (resp. B) est nulle au-dessous des lignes correspondant à G_1 (resp. G_2), et les "carrés" hachurés représentent des opérateurs inversibles. Pour exprimer qu'un opérateur g voisin de f possède les propriétés $\dim(g^{-1}(G_i) \cap F_i) = i$, on écrit que les deux opérateurs représentés par les matrices encadrées de lignes fortes ont un noyau de dimension 1 : on procède pour cela comme dans le Lemme 1, et on obtient autant d'équations (tangentielllement indépendantes) qu'il y a de cases noircies.

Dans la deuxième assertion de la proposition 3, il est évident que la classe $[K(F_i, G_i)]_Q$ ne dépend que de la fonction x et de la suite g_i choisie. Si nous appelons $Q(x)$ l'unique nombre entier vérifiant les inégalités

$$Q(x) - x(Q(x)) \leq 0,$$

$$Q(x)+1 - x(Q(x)+1) > 0,$$

la plus petite suite g_i convenable est $g_1 = \dots = g_{Q(x)} = 0$, et $g_i = i - x(i)$ pour i plus grand que $Q(x)$ (nous appellerons $\sum_1(x)$ cette suite). Soit k un entier compris entre 1 et $L(x)$; nous allons montrer que la classe de cohomologie associée à une fonction $x \in X$ et à une suite g_i convenable pour x est la même que la classe associée à x , et à la suite $\{g_1, \dots, g_{k-1}, g_{k+1}, \dots, g_{L(x)} + 1\}$. Ceci entraînera évidemment le résultat final. Traitons, toujours à l'aide d'un dessin, le cas $L=2$, $k=2$. Soient F_1, F_2, G_1, G_2 , des espaces relatifs à la suite $\{g_1, g_2\}$. Lorsqu'on passe à la suite $\{g_1, g_2 + 1\}$, ils sont remplacés par F_1, F'_2, G_1, G'_2 , où $G'_2 = G_2 \oplus A$, $F_2 = F'_2 \oplus B$. Si f est un opérateur d'indice nul représenté par une matrice comme ci-contre, la colonne donnant $f(B)$ est formée d'un nombre $\alpha(f)$ (la composante de $f(B)$ sur A) et d'un vecteur $\beta(f)$; nous appellerons $\gamma(f)$ l'opérateur



représenté par le reste de la matrice. Dire qu'un opérateur f appartient à $K(F_i, G_i)$ équivaut à dire que le noyau de la matrice hachuré obliquement (resp. verticalement) a une dimension au moins égale à 1 (resp. 2). Dire qu'un opérateur f appartient à $K(F'_i, G'_i)$ équivaut à dire que le noyau de la matrice hachuré obliquement (resp. encadré) a une dimension au moins égale à 1 (resp. 2). Considérons l'appli-

cation affine T de Ω_0 dans lui-même qui, à f , associe l'opérateur représenté par la matrice $(\gamma(f) | \frac{1}{0})$. On voit facilement que $T^{-1}(K(F_i, G_i))$ est égal à $K(F'_i, G'_i)$, et on vérifie sans difficulté la condition de transversalité de la proposition II.1. On a par conséquent

$$[K(F_i^!, G_i^!)]_{\Omega} = T^*[K(F_i, G_i)]_{\Omega} .$$

Mais l'application T est homotope à l'identité de Ω (on peut prendre une homotopie "affine"). La proposition 3 est donc démontrée.

Faisons quelques commentaires sur les différents sous-ensembles analytiques de Ω que, nous avons proposés pour représenter une même classe $[x]$. Quatre d'entre eux nous semblent particulièrement simples :

1° - Celui qui correspond à la suite $\sum_1$: reprenons la figure 1, représentant le graphe d'une fonction x . Le nombre que nous avons appelé p_x à l'occasion de la proposition 2 est égal à $Q(x)$. On se convainc facilement que $K(x, \sum_1)$ est l'adhérence d'un sous-ensemble analytique M de $V^{Q(x)}$: les opérateurs de M sont tous ceux dont le noyau (qui appartient à $\mathcal{G}_{Q(x)}$) satisfait certaines conditions correspondant à la fonction $\hat{x}''$ et dont le conoyau (qui appartient aussi à $\mathcal{G}_{Q(x)}$) satisfait d'autres conditions données par la fonction $\hat{x}'$. Si alors nous reprenons la démonstration de la proposition 2 en pensant à la description habituelle [1] de la cohomologie d'une Grassmannienne, nous trouvons que les classes $[x]$ ($x \in X$) engendrent librement le groupe $H^*(\Omega; \mathbb{Z})$. Nous remarquons aussi que la cohomologie entière de Ω est égale à la limite projective de la cohomologie de ses sous-espaces compacts.

2° - Soit $\sum_2$ la suite $\{g_i = i\}$. L'ensemble $K(x, \sum_2)$ peut être décrit de la façon suivante : soit π_n une suite de projections orthogonales de E , le noyau de π_n ayant pour dimension n et contenant le noyau de π_{n-1} ; $K(x, \sum_2)$ est l'ensemble des opérateurs $f \in \Omega$ tels que

$$\dim \text{Ker}(\pi_n \circ f \circ \pi_p) \geq n+p$$

pour tout couple (n, p) appartenant à la région D_x située

au-dessous du graphe de x .

3° - Soit $\sum_3$ une suite constante $\{g_i = g \gg L(x)\}$: alors, $K(x, \sum_3)$ est l'ensemble des opérateurs $f \in \Omega$ tels que la contre-image par f d'un plan fixe de E , de dimension g , décrive le sous-ensemble analytique W de $\mathcal{G}_g$ formé des plans P tels que

$$\dim(P \cap F_i) \geq i \quad \text{pour } i=1, \dots, g,$$

où F_i est de codimension $x(i)-i+g$. Nous désignerons W par le symbole $[x]_g$ (avec les notations de [1], ce serait le symbole $[N-x(1), \dots, N-x(g)]$, où $N=\infty$).

4° - On pourrait enfin (ce serait une situation "duale" de la précédente) considérer les suites $\sum_4$ du type $\{g_i = x(i)-i+g\}$ où g est un entier fixe assez grand.

Proposition 4. Lorsque x parcourt X , les classes $[x]$ engendrent librement le groupe $H^*(\Omega; \mathbb{Z})$. De plus, pour tout $x \in X$, on a

$$(1) \quad [\hat{x}] = (-1)^{I(x)} [x]^a,$$

où a désigne l'involution de $H^*(\Omega)$ induite par l'adjonction (considérée comme une involution de Ω).

Démonstration : La deuxième assertion résulte de l'aspect 1°, et encore plus clairement de l'aspect 2°, sous lesquels viennent d'apparaître les classes $[x]$: prendre la contre-image par l'adjonction de $K(x, \sum_2)$ revient à échanger les rôles de n et p , donc à remplacer la fonction x par la fonction $\hat{x}$. Mais il faut prendre garde que l'adjonction ne conserve pas les coorientations canoniques de notre figure : les normales aux variétés qui nous intéressent sont munies de structures complexes de dimension $I(x)$, et, sur chaque droite complexe, l'adjonction

renverse l'orientation. D'où le signe dans la formule (1).

Nous avons déjà suggéré une démonstration de la première assertion. En voici une autre, introduisant de nouveaux objets qui vont nous être utiles par la suite. Soient y une fonction de X , et g un entier au moins égal à $L(y)$. Soit $D_1 \subset \dots \subset D_g \subset E$, un drapeau d'espaces vectoriels complexes de dimension finie, la dimension de D_i étant égale à $y(g-i+1)+i$. Nous désignerons par le symbole $\{y\}_g$ (avec les notations de [1], ce serait $[y(g), \dots, y(1)]$) le cycle analytique de $\mathcal{G}_g$ formé des plans P tels que

$$\dim(P \cap D_i) \geq i \quad \text{pour } i=1, \dots, g$$

Ce cycle a pour dimension $2I(y)$. Son produit externe par le générateur de $H_0(\mathcal{G}_g)$ donne un cycle de V^g , donc de Ω , et ce dernier cycle dépend plus de g : nous le noterons $\{y\}$. On peut voir $\{y\}$ comme une famille d'opérateurs d'image fixe $R(\text{codim } R=g)$, dont la famille des noyaux est $\{y\}_g$ (il y a dans cette famille un seul opérateur pour chaque noyau). Il est facile de voir, dans $\mathcal{G}_g$ (à l'imitation de ce qui se passe dans les Grassmanniennes de dimension finie), que l'action du cocycle $[x]_g$ sur le cycle $\{y\}_g$ est 1 si $x=y$, 0 dans le cas contraire. On en conclut que, dans Ω , $[x](\{y\})$ vaut 1 si $x=y$, 0 sinon. Les classes $[x]$ sont donc indépendantes. Comme leur nombre est convenable (prop.2), elles engendrent le groupe $H^*(\Omega)$.

Proposition 5. Le cup-produit $[x] \cup [n]$, où n désigne la fonction de X prenant comme seule valeur non nulle n , est égal à la somme des $[y]$ étendue aux fonctions $y \in X$ telles que $I(y) = I(x)+n$ et $x < y \leq t(x)$, où $t(x)$ désigne la translatée à droite, d'un cran, de la fonction x .

Exemples : $[2] \cup [2] = [4] + [3,1] + [2,2]$

$$[3] \cup [1] = [4] + [3,1]$$

Démonstration : C'est une adaptation d'un théorème de Chern. Nous allons démontrer que $([x] \cup [n])(\{y\})$ vaut 1 si y vérifie les conditions de l'énoncé, 0 autrement. Choisissons un entier g au moins égal à $L(x)$ et à $L(y)$, et une décomposition directe $G \oplus R$ de l'espace-but E , avec $\dim G = g$. Le cocycle $[n]$ peut-être représenté par l'ensemble des opérateurs $f \in \Omega$ tels que $\dim(f^{-1}(G) \cap K) \geq 1$, où K est un sous-espace fermé de l'espace-source E , de codimension $g+n-1$. Il est clair que le nombre d'intersections étudié est égal au nombre d'intersections, dans $\mathcal{G}_g$, des cocycles et cycles $[x]_g$, $[n]_g$, et $\{y\}_g$. Récrivons à notre façon le calcul de Chern : il faut d'abord choisir des plans F_i , D_i , et K en position générale dans E .

Remarquons que si, pour un i , $y(i)$ est strictement plus petit que $x(i)$, on peut prendre des plans F_i et D_{g-i+1} ne se rencontrant qu'en 0, ce qui assure la vacuité de l'intersection de $[x]_g$ et $\{y\}_g$. Nous supposons donc désormais que la fonction y est au moins égale à x . Décomposons E en $E' \oplus E''$, où E' , de dimension g , est muni de coordonnées α_h associées à la base e_h , et où E'' est muni de coordonnées hilbertiennes β_ℓ associées à la base ϵ_ℓ . Nous prendrons

$$F_i = \mathbb{C}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_i \oplus \{\beta_1 = \dots = \beta_{x(i)} = 0\},$$

$$D_i = \mathbb{C}e_{g-i+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_g \oplus \mathbb{C}\epsilon_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\epsilon_{y(g-i+1)}.$$

Posons

$$M_i = F_i \cap D_{g-i+1} = \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}\epsilon_{x(i)+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\epsilon_{y(i)}.$$

Ainsi, $M = \sum M_i$ est la somme de E' et d'un certain nombre de droites $\mathbb{C}\epsilon_\ell$, ce nombre étant strictement plus petit que n si, pour un i au moins, $y(i)$ est strictement plus grand que $x(i-1)$ (rappelons que $I(y) = I(x) + n$).

Démontrons que tout plan P appartenant à l'intersection de $[x]_g$ et $\{y\}_g$ (ceux que nous venons de choisir) est inclus dans M . Considérons le graphe ayant pour sommets les entiers compris entre 1 et g , où on a joint les sommets i et $i+1$ dans le seul cas où $y(i+1)$ est strictement plus grand que $x(i)$. Soit $(p, \dots, q)$ une composante connexe de ce graphe : nous affirmons que tout $P \in [x]_g \cap \{y\}_g$ rencontre

$$\sum_p^q M_i = \mathbb{C}e_p \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_q \oplus \mathbb{C}e_{x(q)+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_{y(p)} = F_q \cap D_{g-p+1}$$

suivant un espace de dimension au moins égale à $q-p+1$; en effet, $\dim P = g$, $\dim P \cap F_q \geq q$ et $\dim P \cap D_{g-p+1} \geq g-p+1$. Par ailleurs,

les différentes sommes $\sum_p^q M_i$ ne se rencontrent deux à deux qu'en 0. La dimension de $P \cap M$ est donc au moins égale à $\sum (q-p+1) = g$.

1er cas : Il existe au moins un i tel que $y(i) > x(i-1)$. Nous pouvons alors choisir l'espace K , de codimension $g+n-1$ dans E , de sorte qu'il ne rencontre M qu'en 0, et l'intersection $[x]_g \cap \{y\}_g \cap [n]_g$ est clairement vide.

2ème cas : Si $y \leq t(x)$, les espaces M_i sont "disjoints", et tout plan $P \in [x]_g \cap \{y\}_g$ rencontre chacun d'eux suivant une droite $D_i(P)$. Choisissons

$$K = \{\alpha_1 = \dots = \alpha_g\} \oplus \{\beta_{x(i)+1} = \dots = \beta_{y(i)} = 0 \mid \forall i=1, \dots, g\}$$

L'intersection de K et M est alors réduite à la droite $D = \{\alpha_1 = \dots = \alpha_g\}$. Cette droite devant être une combinaison des droites $D_i(P)$ pour tout plan $P \in [x]_g \cap \{y\}_g \cap [n]_g$, il est clair que la seule solution est $D_i(P) = \mathbb{C}e_i$, donc $P = E'$, et ceci avec la multiplicité 1.

Corollaire 6.

$$[x] = \text{déterminant } [x(i)+j-i], \\ 1 \leq i, j \leq L(x)$$

le déterminant étant pris pour le cup-produit, avec la convention de faire nul ce qui n'a pas de sens. L'anneau de cohomologie entière de Ω est donc l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[[1], \dots, [n], \dots]$.

Exemple : $[2, 2] = [2] \cup [2] - [3] \cup [1]$

Intermède :

Etudions directement cet exemple, sans utiliser les classes d'homologie $\{y\}$. Choisissons deux sous-espaces E' et E'' de E , de codimension 1, dont l'intersection soit de codimension 2. Posons

$$K(E', 0) = V', \quad K(E'', 0) = V'', \quad K(E' \cap E'', 0) = W.$$

Rappelons aussi que, pour tout p , la classe $[\bar{V}^p]_\Omega$ n'est autre que $\underbrace{[p, \dots, p]}_{p \text{ fois}}$. Nous prétendons démontrer l'égalité

$$[V'] \cup [V''] = [\bar{V}^2] + [\bar{V}^1] \cup [W].$$

Soit U_1 le complémentaire dans Ω de $\bar{V}^2$, et U_2 celui de $\bar{V}^1 \cap W$. On voit facilement que $U_1 \cup U_2$ est égal à Ω , à un fermé de codimension topologique 16 près, donc que $H^4(\Omega) = H^4(U_1 \cup U_2)$. On voit aussi que la cohomologie de $U_1 \cap U_2$ (i.e. l'ensemble des opérateurs dont le noyau est de dimension au plus 1 et n'est pas contenu dans $E' \cap E''$) s'annule en degrés impairs. L'application naturelle de $H^4(U_1 \cup U_2)$ dans $H^4(U_1) \oplus H^4(U_2)$ est donc une injection, et il suffit de démontrer la formule convoitée dans U_1 et U_2 successivement. Dans U_2 , elle tient à ce que V' et V'' se coupent transversalement le long de $\bar{V}^2$. Dans U_1 , V' et V'' se coupent le long de $V^1 \cap W$, mais pas transversalement ; toutefois, l'intersection est transverse si l'on considère V' et V'' comme sous-"variétés" de V^1 ; on applique alors la propriété II.7.

Proposition 7. Si $P_n(c_1, \dots, c_n)$ est le polynôme qui exprime la somme des puissances n ièmes d'un nombre suffisant de variables en fonction de leurs polynômes symétriques élémentaires, posons $Ch_n = P_n([1], \dots, [n])$. On a

$$Ch_n = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p [p+1, \underline{n-p-1}]$$

Nous rappelons que $(p+1, \underline{n-p-1})$ désigne la fonction de X qui prend la valeur $p+1$, puis $n-p-1$ fois la valeur 1.

Exemples : $Ch_1 = [1]$

$$Ch_2 = [1, 1] - [2] = [1] \cup [1] - 2[2]$$

Démonstration : Nous procédons par récurrence sur n . Pour calculer Ch_{n+1} , considérons les $n+1$ racines du polynôme $T^{n+1} - c_1 T^n + \dots + (-1)^{n+1} c_{n+1}$. Nous trouvons

$$Ch_{n+1} = (-1)^n (n+1) [n+1] + \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} [p] \cup Ch_{n-p+1}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$Ch_{n-p+1} = \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i [i+1, \underline{n-p-i}]$$

D'après la proposition 5,

$$\begin{aligned} \text{si } i \leq n-p-1, [i+1, \underline{n-p-i}] \cup [p] &= \sum_{q=0}^{\inf(i, p)} [i+1+p-q, 1+q, \underline{n-p-i-1}] \\ &+ \sum_{r=0}^{\inf(i, p-1)} [i+p-r, 1+r, \underline{n-p-i}] ; \end{aligned}$$

$$\text{pour } i=n-p, [n-p+1] \cup [p] = \sum_{q=0}^{\inf(p, n-p+1)} [n-q+1, q]$$

Donc

$$\begin{aligned}
 Ch_{n+1} = & (-1)^n (n+1) [n+1] + (-1)^{n+1} \sum_{\substack{p=1, \dots, n \\ q=0, \dots, \inf(p, n-p+1)}} [n-q+1, q] \\
 & + \sum_{\substack{p=1, \dots, n-1 \\ i=0, \dots, n-p-1 \\ q=0, \dots, \inf(p, i)}} (-1)^{p+i+1} [i+1+p-q, 1+q, \underline{n-p-i-1}] \\
 & + \sum_{\substack{p'=0, \dots, n-2 \\ i=0, \dots, n-p'-2 \\ q=0, \dots, \inf(p', i)}} (-1)^{p'+i} [i+1+p'-q, 1+q, \underline{n-p'-i-1}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Ch_{n+1} = & (-1)^n (n+1) [n+1] + (-1)^n (n, 1) + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i (i+1, \underline{n-i}) \\
 & + (-1)^n \sum_{\substack{p=1, \dots, n-2 \\ q=1, \dots, \inf(p+1, n-p)}} [n-q+1, q] \\
 & + (-1)^{n+1} \sum_{\substack{p=1, \dots, n \\ q=0, \dots, \inf(p, n-p+1)}} [n-q+1, q] .
 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que la deuxième ligne de cette expression vaut

$$n(-1)^{n+1} [n+1] + 2(-1)^{n+1} [n, 1] .$$

D'où

$$Ch_{n+1} = (-1)^n [n+1] + (-1)^{n-1} [n, 1] + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i [i+1, \underline{n-i}] .$$

Proposition 8. Soit S l'application de $\Omega \times \Omega$ dans Ω qui résulte, par une transmutation convenable, de l'application

qui associe à deux opérateurs f et g la matrice $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$. On a

$$S^*[n] = \sum_{p=0}^n [p] \times [n-p]$$

Démonstration : Ecrivons $E = E' \oplus E''$, où les espaces E' et E'' sont tous deux de dimension infinie, et considérons l'application S comme allant de $\Omega(E') \times \Omega(E'')$ dans $\Omega(E)$. Nous voulons étudier $S^*[n].\{y\} \times \{z\}$ (où y et z sont des fonctions quelconques de X), ou aussi bien $[n].S(\{y\} \times \{z\})$.

1er cas : On a $L(y) > 1$, ou $L(z) > 1$. Puisque $I(y) + I(z) = n$, cela se traduit par l'inégalité $y(1) + z(1) \leq n-1$. Choisissons dans E' (resp. E'') un plan G' (resp. G'') de dimension $g' \geq L(y)$ (resp. $g'' \geq L(z)$) et un plan F' (resp. F'') de codimension $y(1)+g'$ (resp. $z(1)+g''$). Le cycle $\{y\}$ (resp. $\{z\}$) de $\Omega(E')$ (resp. $\Omega(E'')$) peut être représenté par une famille d'opérateurs f' (resp. f'') tels que $f'^{-1}(G') \cap F' = 0$ (resp. $f''^{-1}(G'') \cap F'' = 0$). Le cycle $S(\{y\} \times \{z\})$ de $\Omega(E)$ peut donc être représenté par une famille d'opérateurs f tels que $f^{-1}(G' \oplus G'') \cap (F' \oplus F'') = 0$. Or, le cocycle $[n]$ est par exemple associé à l'ensemble des opérateurs de $\Omega(E)$ tels que $\dim f^{-1}(G' \oplus G'') \cap F \geq 1$, où F , de codimension $g' + g'' + n - 1 \geq g' + g'' + y(1) + z(1)$ peut être choisi contenu dans $F' \oplus F''$.

2ème cas : Il ne nous reste plus qu'à montrer que $[n].S(\{p\} \times \{n-p\})$ vaut 1. Choisissons dans E' (resp. E'') une droite G' (resp. G'') et un plan D' (resp. D'') de dimension $p+1$ (resp. $n-p+1$). Choisissons dans E un plan F de codimension $n+1$ rencontrant $D' \oplus D''$ suivant une seule droite Δ , qui ne soit située ni dans D' , ni dans D'' . Le cycle $S(\{p\} \times \{n-p\})$ peut être représenté par une famille d'opérateurs f tels que $f^{-1}(G' \oplus G'')$ soit un 2-plan s'appuyant sur D' et D'' . Et $[n]$ est par exemple associé à l'ensemble des f tels que $\dim f^{-1}(G' \oplus G'') \cap F \geq 1$. Il y a alors un seul plan $f^{-1}(G' \oplus G'')$ convenable, et ceci avec la multiplicité 1.

Remarque. L'application $f \rightarrow S(f, f^a)$ est homotope à l'application $f \rightarrow \begin{pmatrix} ff^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [3], donc à une constante (*). D'où la formule

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} [n] \right) \cup \left(\sum_{n=0}^{\infty} [n]^a \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} [n] \right) \cup \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [n] \right) = 1 ,$$

que l'on peut bien sûr vérifier par le calcul.

Classes et caractère de Chern.

Etant donné un espace connexe paracompact Y , le groupe de Grothendieck $K(Y)$ des fibrés vectoriels de rang fini de base Y s'injecte dans le groupe $\mathcal{K}(Y)$ fabriqué avec les complexes quasi-acycliques de fibrés hilbertiens de base Y [3], lequel s'identifie à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de Y dans Ω (en général, $\mathcal{K}(Y)$ est strictement plus grand que $K(Y)$: prendre pour Y l'espace Ω_0 ; ces deux groupes coïncident cependant lorsque Y est compact). Précisons le "signe" de notre application de $K(Y)$ dans $[Y, \Omega]$: à une différence de fibrés $\xi - \eta$, nous associons la classe d'homotopie d'une quelconque famille d'opérateurs à indice paramétrée par Y dont la famille des noyaux "soit" η et dont la famille des conoyaux soit ξ .

Nous pouvons définir une notion d'amplitude pour les classes $\alpha \in [Y, \Omega]$: nous dirons qu'une classe α est d'amplitude inférieure ou égale à p s'il existe une application a de Y dans Ω représentant α et un entier n tels que l'image de a soit contenue dans $\Omega^{n+p} - \Omega^n$. Par exemple, les classes de $[Y, \Omega]$ qui appartiennent à l'image de $K(Y)$ sont exactement les classes d'amplitude 1. Nous allons définir des classes de cohomologie entière $\gamma_n \in H^{2n}(\Omega; \mathbb{Z})$, qui induiront des classes $\gamma_n(\alpha) \in H^{2n}(Y; \mathbb{Z})$ pour tout $\alpha \in [Y, \Omega]$. Puis, nous

(*) En effet, toute famille d'opérateurs à indice autoadjoints (complexes) est homotope (dans Ω) à une constante. Cette même remarque montre que a est l'involution canonique de l'algèbre de Hopf $H^*(\Omega)$.

vérifierons que, pour les α d'amplitude 1, ces classes sont les classes de Chern.

Définition. La composante dans Ω_0 de γ_n sera $[n]$. Sa composante dans un quelconque Ω_i est définie de façon toute semblable : soient p, q deux entiers positifs ou nuls tels que $p-q = n+i-1$, F un sous-espace fermé de E , de codimension p , et G un sous-espace de E de dimension q ; soit $K_i(F, G)$ l'ensemble des opérateurs $f \in \Omega_i$ tels que $f^{-1}(G) \cap F$ ne soit pas réduit à 0 . On vérifie, comme dans le cas $i=0$, que $K_i(F, G)$ est un joli sous-ensemble analytique complexe de Ω_i , de codimension n , et que la classe $[K_i(F, G)]_{\Omega_i}$ ne dépend en fait que de n (et de i) : c'est cette classe qui est, par définition, la composante de γ_n dans Ω_i .

Proposition 9. Si α est d'amplitude 1, $\gamma_n(\alpha)$ est égale à la classe de Chern $c_n(\alpha)$.

1ère démonstration : Supposons que α soit l'image de la différence $\xi - \eta$, avec $\text{rg } \eta - \text{rg } \xi = i$. Soient P et Q deux espaces vectoriels de dimension finie, tels que $\dim P - \dim Q = n+i-1$. Si nous appelons ξ' (resp. η') le fibré $\xi \otimes P$ (resp. $\eta \otimes Q$), nous avons $\text{rg } \xi' - \text{rg } \eta' = n-1$. Nous savons qu'alors $c_n(\xi' - \eta') = c_n(\xi - \eta)$ est la première obstruction à trouver un morphisme injectif de η' dans ξ' . Comme il suffit évidemment de démontrer la proposition dans le cas où tout est différentiable, mettons des structures différentiables sur Y , ξ et η . Alors, $c_n(\xi' - \eta')$ est représenté par la sous-variété entrouverte où un morphisme différentiable générique ϕ de η' dans ξ' est de profondeur 1. Il ne reste plus qu'à superposer à ϕ le morphisme nul de P dans Q et l'identité d'un fibré trivial à fibre hilbertienne H de dimension infinie, à trivialisier $\eta' \otimes H$ en $F \times Y$, $\eta' \otimes H \otimes P$ en $E \times Y$, à trivialisier $\xi' \otimes H \otimes Q$ en $E \times Y$: dans ces trivialisations, $\phi \otimes \text{Id}_H \otimes 0$ devient α , qui représente α , et, si l'on veut bien se souvenir que γ_n peut être

représenté dans Ω_i par $K_i(F, Q)$, on voit que $c_n(\xi - \eta)$ n'est autre que $\gamma_n(\alpha)$.

2ème démonstration : En vertu de la proposition 8, il nous suffit de voir que, si ξ est un fibré de rang p et τ_p le fibré trivial de même rang, on a, pour tout n , $c_n(\xi) = \gamma_n(\xi - \tau_p)$; c'est-à-dire de voir que les $\gamma_n(\xi - \tau_p)$ vérifient les axiomes des classes de Chern. Il y en a en fait un seul que nous n'ayons pas examiné : c'est l'axiome de normalisation $c(\eta_n) = 1 + h_n$ (avec les notations de [2], page 58). Il résulte immédiatement des définitions que

$$\gamma(\tau_1 - \eta_n^*) = \sum_{j=0}^n \gamma_j(\tau_1 - \eta_n^*) = \sum_{j=0}^n (h_n)^j,$$

ce qui est bien équivalent.

Corollaire 10. Dans l'espace universel Ω_0 , le caractère de Chern (stabilisé) est la classe

$$\sum_{\substack{p \geq 1 \\ q \geq 0}} \frac{(-1)^{p-1}}{(p+q)!} [p, q] \in H^{**}(\Omega_0; \mathbb{Z})$$

Remarque : Indépendamment de nous, Koschorke a donné dans [5] une interprétation analogue des classes de Chern. En fait, ce qu'il prend comme $n^{\text{ième}}$ classe de Chern est plutôt notre $(-1)^n [n]$, ce qui est tout à fait compatible avec notre définition, la proposition 4, et le fait que son injection de $K(Y)$ dans $[Y, \Omega]$ est du "signe" opposé à la nôtre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHERN : Ann. Math, 49, 1948, p.362-372.

- [2] HIRZEBRUCH : Topological methods in algebraic geometry. Springer, Verlag 1966.
- [3] ILLUSIE : Complexes de fibrés et définition du foncteur K (Séminaire de Topologie, I.H.E.S., 1964-65).
- [4] JANICH : Vektorraumbündel und der Raum der Fredholmoperatoren, Math. Annalen 161, 1965, p. 129-142.
- [5] KOSCHORKE : Infinite dimensional K -theory and characteristic classes of Fredholm bundle maps. Dissertation. Brandeis, mai 1968.
- [6] KUIPER : The homotopy type of the unitary groups of Hilbert space, Topology 3, 1965, p.19-20.
- [7] RUGET : Exposé n°2.

THESE COMPLEMENTAIRE

Je remercie Pierre Samuel d'avoir bien voulu se joindre à MM. Henri Cartan et Adrien Douady pour constituer le jury de cette thèse, et de m'avoir donné comme deuxième sujet :

"Un théorème de dualité pour la cohomologie d'un espace analytique à valeur dans un faisceau cohérent",

ainsi que Bernard Malgrange qui, en ce domaine comme en d'autres, a été mon mentor.

— o o o o o o o —

— o o —

